



Universität der Bundeswehr München  
Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau

**Adaptive Kopplung  
des netzfreien SPH-Verfahrens  
mit finiten Elementen  
zur Berechnung von Impaktvorgängen**

Martin Sauer

20041110 056

00/5 Baumechanik - Baustatik - Ingenieurinformatik - Holzbau - Massivbau - Stahlbau

ISSN 1431-5122

# REPORT DOCUMENTATION PAGE

Form Approved OMB No. 0704-0188

Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.

1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)		2. REPORT DATE 2000	3. REPORT TYPE AND DATES COVERED Dissertation	
4. TITLE AND SUBTITLE Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finisten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgaengen  (Adaptive Coupling of the Mesh-Free SPH-Method with Finite Elements for the Calculation of Impact Events)			5. FUNDING NUMBERS	
6. AUTHOR(S) Martin Sauer			8. PERFORMING ORGANIZATION REPORT NUMBER	
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES) Institut fuer Mechanik und Statik Werner-Heisenberg-Weg 39 85577 Neubiberg			10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER	
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES) UNIBW			11. SUPPLEMENTARY NOTES Text in German, 202 pages.	
12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT Category A; Public Release			12b. DISTRIBUTION CODE	
ABSTRACT (Maximum 200 words)  Impact and penetration problems are of particular importance in many fields of engineering science, including wave propagation. Traditionally, mesh-based methods like the Finite Element Method have been used for their numerical analyses. Recently, mesh-free methods have attracted interest. The mesh-free "Smooth Particle Hydrodynamics" (SPH) method used in this work offers advantages in modelling both large deformations and behavior of failed material, because there are not fixed topological bonds between numerical sampling points. However, applicability of SPH-method was restricted due to its high computational expenses. The "Hybrid Approximation" presented in this report, a method for coupling the SPH-method with Finite Elements, allows for selective use of SPH in the discretization of a structure: SPH is used locally if large deformations occur, while otherwise Finite Elements are used.				
14. SUBJECT TERMS UNIBW, Germany, Finite elements, Engineering science, Wave propagation, Mesh-based methods, Smooth Particle Hydrodynamics (SPH), SPH-method			15. NUMBER OF PAGES	
			16. PRICE CODE	
17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT UNCLASSIFIED	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE UNCLASSIFIED	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT UNCLASSIFIED	20. LIMITATION OF ABSTRACT UL	

**BEST AVAILABLE COPY**

Machine assisted translation.



**Universität der Bundeswehr München**

Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau

---

**Adaptive Kopplung  
des netzfreien SPH-Verfahrens  
mit finiten Elementen  
zur Berechnung von Impaktvorgängen**

**Martin Sauer**

---

00/5 Baumechanik - Baustatik - Ingenieurinformatik - Holzbau - Massivbau - Stahlbau

ISSN 1431-5122

AQ F05-01-0065

**Herausgeber:**

Univ.-Prof. Dr.-Ing. N. Gebbeken (federführend)  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Böge  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Ewald  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. A. Heinen  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. M. Keuser  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. D. Könke  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. I. Mangerig  
em. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. C. Petersen

**Schriftleitung:**

Univ.-Prof. Dr.-Ing. N. Gebbeken  
Institut für Mechanik und Statik  
Universität der Bundeswehr München  
Werner-Heisenberg-Weg 39  
85577 Neubiberg  
Tel.: 089-6004-3414  
email: norbert.gebbeken@unibw-muenchen.de

©2000 Autor  
Werner-Heisenberg-Weg 39  
85577 Neubiberg

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors/Herausgebers ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

ISSN 1431-5122

Die vorliegende Arbeit ist ein vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommenen Dissertation.

## **Vorwort**

Bei Professor Könke möchte ich mich für die Betreuung der Arbeit, die Übernahme des Referates und die hervorragende Unterstützung am Labor für Ingenieurinformatik bedanken, außerdem für das Vertrauen und die Geduld, die er mir stets entgegenbrachte. Professor Thoma, Leiter des Fraunhofer Institutes für Kurzzeitdynamik in Freiburg (Ernst-Mach-Institut), danke ich für die wertvollen fachlichen Anregungen, die Übernahme des Korreferates und die besondere Unterstützung in der Abschlußphase. Bei Professor Wichmann bedanke ich mich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Das Programm SOPHIA wurde von Stefan Hiermaier zur Verfügung gestellt. Ihm und Werner Riedel danke ich für wichtige und hilfreiche Anregungen und Diskussionen. Dies gilt auch für meine Kollegen an der Universität der Bundeswehr, stellvertretend für alle Manfred Kunas, Herbert Sigl, Eberhard Pfeiffer und Max Ruppert.

Den Entwicklern des Programmes Femas-Orpheus in Bochum bzw. Aachen, Rostislav Chudoba, Roland Littwin, Holger Karutz und Carsten Könke, möchte ich für ihre offene Kooperation danken.

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsauftrages „Weiterentwicklung der Methode der Smooth Particle Hydrodynamics“ des Bundesamtes für Wehrtechnik und Beschaffung (BWB Forschungsauftrag Nr. E/K41H/V0061/T5203). Allen, die mit ihrem Engagement außerhalb der Universität der Bundeswehr die Arbeit möglich gemacht und begleitet haben, gilt mein besonderer Dank, insbesondere Herrn Baudirektor Kropatschek vom BMVg, Abt. RueV 5, und Herrn Bauoberrat Dietmar Carl von der Wehrtechnischen Dienststelle 52 in Oberjettenberg.

Schließlich möchte ich auch meine Lebensgefährtin Miriam Weissroth nennen, die mich in dieser Zeit tapfer ertragen und manchmal auch getragen hat - hab Dank!

Freiburg, im Oktober 2000

Martin Sauer

### Mitglieder des Promotionsausschusses:

Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Klaus Wichmann
1. Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. Diethard Könke
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. rer. nat. Klaus Thoma

Tag der Einreichung der Arbeit:	31. März 2000
Tag der mündlichen Prüfung:	31. Juli 2000

## Zusammenfassung

Impakt oder Penetrationsvorgänge sind in verschiedenen Bereichen der Ingenieurwissenschaften von Bedeutung. Für ihre numerische Analyse werden traditionell Verfahren eingesetzt, die auf einer Diskretisierung der Bauteile in Berechnungsnetzen basieren, insbesondere die Methode der Finiten Elemente (FE). In jüngerer Zeit haben daneben netzfreie Verfahren Beachtung gefunden. Die hier betrachtete netzfreie Methode der „Smooth Particle Hydrodynamics“ (SPH) bietet bei großen Deformationen und bei der Modellierung des Verhaltens von versagtem Material Vorteile, weil keine festen topologischen Verbindungen zwischen Berechnungspunkten benötigt werden. Die Anwendbarkeit der SPH-Methode war jedoch bislang durch den Nachteil eines gegenüber Netzmethoden deutlich höheren Berechnungsaufwandes begrenzt. Die in dieser Arbeit vorgestellte „Hybride Approximation“, eine Kopplung der SPH-Methode mit Finiten Elementen, ermöglicht einen gezielten Einsatz des netzfreien Verfahrens in genau den Bereichen einer Struktur, in denen große Verformungen auftreten.

Die vorliegende Arbeit gibt zunächst einen Überblick über die kontinuumsmechanischen und mathematischen Grundlagen von FE- und SPH-Methoden für Impaktvorgänge. Anschließend wird das Kopplungsverfahren erläutert, das in einer Weiterentwicklung des SPH-Programmes SOPHIA realisiert wurde. Das Programm bietet jetzt eine adaptive Kopplung mit selbständiger Umwandlung von Elementen in Partikel, es basiert auf einem neuen, auf diese Aufgabe zugeschnittenen objektorientierten Datenmodell. Die Anwendbarkeit des Verfahrens und den erzielten Effizienzgewinn zeigen Wellenausbreitungs- und Penetrationsrechnungen am Schluß der Arbeit.

## Summary

Impact and penetration problems are of particular importance in many fields of engineering science. Traditionally, meshbased methods like the Finite Element Method have been used for their numerical analyses. Recently, meshfree methods have attracted interest. The meshfree „Smooth Particle Hydrodynamics“ (SPH) method used in this work offers advantages in modelling both large deformations and behaviour of failed material, as there are no fixed topological bonds between numerical sampling points. However, applicability of the SPH-method was restricted due to its high computational expenses. The „Hybrid Approximation“ presented in this report, a method for coupling the SPH-method with Finite Elements, allows for selective use of SPH in the discretisation of a structure: SPH is used locally if large deformations occur, while otherwise Finite Elements are used. The computer code SOPHIA-PL, developed from an existing SPH code, is based on a new object oriented data model which was especially designed for this adaptive coupling. The applicability of the method and the efficiency gain are demonstrated for wave propagation and penetration calculations.

**Inhalt:**

1. EINLEITUNG .....	1
1.1 Ausgangssituation .....	3
1.2 Problemstellung und Motivation .....	4
1.3 Zielsetzung .....	5
2. GRUNDLAGEN AUS DER MECHANIK .....	7
2.1 Kinematische Beschreibung des Kontinuums .....	7
2.1.1 Koordinatensysteme .....	7
2.1.2 Materielle (Lagrangesche) und räumliche (Eulersche) Beschreibung .....	8
2.1.3 Beschreibung der Deformation .....	10
2.1.4 Zeitliche Änderung der Deformation .....	10
2.2 Spannungsbeschreibung .....	11
2.2.1 Verwendeter Spannungstensor .....	11
2.2.2 Aufteilung in Druck und Spannungsdeviator .....	11
2.2.3 Objektive Spannungsraten .....	12
2.3 Erhaltungsgleichungen .....	12
2.4 Spannungswellenausbreitung und Schock .....	14
2.4.1 Kontinuierliche Wellen .....	15
2.4.2 Spannungswellen in elastischen Medien .....	15
2.4.3 Spannungswellen in plastischen Medien .....	18
2.4.4 Schockwellen .....	19
2.4.5 Numerische Behandlung von Schockwellen .....	21
2.5 Materialgleichungen .....	24
2.5.1 Zustandsgleichungen .....	25
2.5.2 Zeitliche Integration der deviatorischen Spannungen, Festigkeitsmodelle ....	26
2.5.3 Versagensmodelle .....	28
3. GRUNDLAGEN AUS DEN NUMERISCHEN SIMULATIONSVERFAHREN .....	29
3.1 Mathematische Formulierung der Problemstellung .....	29
3.2 Starke und schwache Formen der Differentialgleichungen .....	32
3.3 Diskretisierungsansätze .....	33
3.3.1 Finite Differenzen .....	33
3.3.2 Ansatzverfahren .....	36
3.3.2.1 Finite Elemente .....	38
3.3.2.2 Netzfremde Verfahren .....	41

---

4. VERFAHREN DER ZEITLICHEN DISKRETISIERUNG .....	49
4.1 Explizite und Implizite Zeitintegration .....	49
4.2 Möglichkeiten zur Formulierung expliziter Verfahren .....	52
4.2.1 Explizite Eulerdiskretisierung .....	52
4.2.2 Prädiktor-Korrektor Verfahren .....	52
4.2.3 Leap-Frog Algorithmus .....	53
4.3 Berechnungsablauf für ein explizites Verfahren mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung, Berechnung der inneren Energie .....	54
4.4 Globale Impuls- und Energieerhaltung .....	55
5. EIN FINITE-ELEMENTE-VERFAHREN FÜR IMPAKTVORGÄNGE .....	59
5.1 Elementformulierungen .....	60
5.1.1 Quadrilaterales Element .....	60
5.1.2 Hexaederelement .....	62
5.1.3 Innere Energie .....	64
5.2 Hourglass-Viskosität .....	64
5.3 Randbedingungen .....	67
5.4 Bestimmung des Randes für quadrilaterale Elemente .....	68
5.5 Kontaktalgorithmus für quadrilaterale Elemente .....	69
6. NETZFREIES BERECHNUNGSVERFAHREN FÜR IMPAKTVORGÄNGE .....	73
6.1 Die SPH -Methode .....	73
6.1.1 Approximationsverfahren .....	73
6.1.2 SPH-Formulierung der Erhaltungsgleichungen .....	76
6.1.3 Künstliche Viskosität .....	76
6.1.4 Erweiterungen .....	77
6.2 Weiterentwicklung des SPH-Verfahrens .....	78
6.2.1 Defizite des „Standard-SPH“-Verfahrens .....	78
6.2.2 Ansätze zur Verbesserung des SPH-Verfahrens .....	81
6.2.3 Normalisiertes SPH-Verfahren .....	83
6.2.4 Anwendung der Normalisierung .....	85
7. VERFAHREN ZUR KOPPLUNG VON SPH- UND FINITE-ELEMENTE-METHODE .....	87
7.1 Bekannte Kopplungsverfahren .....	87
7.1.1 Master-Slave Algorithmus .....	87
7.1.1.1 Übersicht .....	87
7.1.1.2 Diskussion .....	91

7.1.1.3	Eigener Master-Slave-Algorithmus für die Kopplung von Partikeln und Elementen .....	92
7.1.2	Übergangselemente: Partikel auf dem FE-Rand .....	94
7.1.2.1	Übersicht .....	94
7.1.2.2	Diskussion .....	95
7.1.2.3	Eigene Implementierung einer Kopplung durch Fixierung von Partikeln an Knoten .....	96
7.1.3	Weitere Möglichkeiten zur Kopplung von Partikeln mit Finiten Elementen ..	97
7.1.3.1	Modifikation der Ansatzfunktionen .....	97
7.1.3.2	Kopplung durch Rampenfunktionen .....	98
7.2	Neues Verfahren auf der Basis einer hybriden Approximation .....	99
7.2.1	Konzept .....	99
7.2.2	Hybrides Approximationsverfahren .....	101
7.2.3	Hybride Formen der Erhaltungsgleichungen .....	108
7.2.4	Berechnung der Kraft auf Elementknoten und globale Impulserhaltung ....	109
7.2.4.1	Berechnung von Knotenkräften aus den Spannungen im SPH-Bereich .....	109
7.2.4.2	Kräfte auf Knoten aus den Beiträgen in den SPH-Summengleichungen .....	111
7.3	Vergleich der Kopplungsverfahren .....	112
7.3.1	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile .....	114
7.3.2	Vergleich der Druckentwicklung .....	117
7.3.3	Vergleich der Impulsübertragung .....	123
7.3.4	Vergleich der Energieübertragung .....	124
7.3.5	Schlußfolgerungen .....	126
7.4	Einsatz des neuen Kopplungsverfahrens im Sinne eines adaptiven Berechnungsverfahrens .....	128
7.4.1	Kriterien für die Adaptivität .....	129
7.4.2	Durchführung der Umwandlung von Elementen in Partikel .....	131
8.	IMPLEMENTIERUNG IN EINER OBJEKTORIENTIERTEN PROGRAMMIERSPRACHE .....	133
8.1	Ausgangspunkt und Anforderungen .....	134
8.2	Modellbeschreibung .....	137
8.2.1	Konzept von <i>MassPoint</i> und <i>StressPoint</i> .....	138
8.2.2	Basiselemente als abstrakte Basisklasse für Elemente und Partikel .....	139
8.2.3	Konzept von Strength- und EOS-Klassen .....	141
8.2.4	Regionen und Körper - Übergang zur globalen Datenstruktur .....	142
8.3	Implementierte Klassen .....	144

9. ANWENDUNG FÜR DIE BERECHNUNG EINES IMPAKTVORGANGES .....	147
9.1 Betrachteter Impaktvorgang .....	147
9.2 Zweidimensionale Simulation .....	148
9.2.1 Berechnungsvarianten .....	152
9.2.2 Geschwindigkeitsentwicklung .....	153
9.2.3 Plastische Dehnungen .....	156
9.2.4 Druckentwicklung .....	160
9.2.5 Fehler der Energiebilanz .....	165
9.3 Auswirkungen auf die Berechnungszeit .....	166
9.4 Ausblick: Anwendung der adaptiven Kopplung in der dreidimensionalen Berechnung des Penetrationsvorganges .....	168
9.5 Schlußfolgerungen .....	170
10. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK .....	173
11. LITERATURVERZEICHNIS .....	177
12. ANHANG .....	185
12.1 Anhang 1: Entwicklung des Gesamtimpulses und des Impulses in FE- und SPH/NSPH-Bereichen bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten für das Beispiel der eindimensionalen Ausbreitung einer elastischen Welle .....	185
12.2 Anhang 2: Entwicklung der gesamten Energie sowie der inneren und kinetischen Energie in FE- und SPH/NSPH-Bereichen bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten für das Beispiel der eindimensionalen Ausbreitung einer elastischen Welle .....	188
12.3 Anhang 3: Quelltext der Deklaration der Klasse <i>BasisEl</i> im erstellten Programm .....	192
12.4 Anhang 4: Quelltext der Deklaration der globalen, im Programm verwendeten Containerklassen .....	197
12.5 Anhang 5: Quelltext der Zeitintegrationsschleife im erstellten Programm ...	200

**Abbildungen:**

Abbildung 1.1: Verschiedene Diskretisierungsverfahren .....	3
Abbildung 1.2: Prinzip des adaptiven Einsatzes der Kopplung von SPH und FEM bei einer Penetrationsberechnung .....	6
Abbildung 2.1: Kartesisches Koordinatensystem und Zylinderkoordinaten .....	7
Abbildung 2.2: Eindimensionale Spannungswelle .....	15
Abbildung 2.3: Reflektierte und refraktierte Wellen, die beim Auftreffen einer Longitudinalwelle mit dem Winkel $\theta_1$ zur Lotrechten auf eine Grenzschicht zwischen unterschiedlichen Materialien entstehen (nach Meyers, 1994). Die Winkel lassen sich in Abhängigkeit von den Wellengeschwindigkeiten durch die angegebene Gleichung berechnen. ....	18
Abbildung 3.1: Mögliche Integrationspfade für die Randintegrale in zweidimensionalen Finite-Differenzenverfahren (Integral-Differenzen-Methode) .....	35
Abbildung 3.2: Eindimensionale Elemente (a,b) mit Knoten (1, 2, 3), lokalen Koordinaten $\xi$ und Formfunktionen N .....	39
Abbildung 3.3: Hexaederelement mit voller und reduzierter Integration .....	41
Abbildung 3.4: Netzfremde Approximation mit allgemeiner (links) und radialer Ansatzfunktion (rechts) .....	44
Abbildung 3.5: Wichtungsfunktion (kubischer B-Spline) .....	44
Abbildung 3.6: Möglichkeiten der Variablenplatzierung für netzfremde Kollokationsverfahren: Standard SPH-Methode und Trennung von Spannungs- und Massepunkten .....	46
Abbildung 3.7: Integrationsschemata bei netzfremden Galerkin-Verfahren: Hintergrundzellen und knotenweise Integration .....	47
Abbildung 4.1: Zusammenhang der Variablen im Berechnungsablauf .....	57
Abbildung 4.2: Zusammenhang der Variablen im Berechnungsablauf im ersten Zeitschritt .....	58
Abbildung 5.1: Quadrilaterales Element, lineare Formfunktion für den Knoten K .....	60
Abbildung 5.2: Spannung und Knotenkräfte; Knotengeschwindigkeiten und Deformationsrate .....	62
Abbildung 5.3: Hexaederelement mit lokalen Koordinaten und Knotennumerierung .....	62
Abbildung 5.4: Berechnung von Knotenkräften aus Druckrandbedingung an den Knoten $k_1$ , $k_2$ und $k_3$ .....	67
Abbildung 5.5: Mögliche Randverläufe bei quadrilateralen Elementen .....	69
Abbildung 5.6: Verschiedene Fälle für die Kontaktberechnung mit dem „Gap“-Algorithmus .....	70
Abbildung 5.7: Geometrische Bezeichnungen für die Kontaktberechnung im Fall a) .....	71
Abbildung 6.1: Verlauf der Wichtungsfunktion und ihrer Ableitung in x-Richtung .....	79
Abbildung 6.2: Verlauf von Kernel-Funktion, erster und zweiter Ableitung im eindimensionalen Fall. ....	79

---

Abbildung 6.3: Singulärer Bewegungsmodus, Partikel mit Ableitung der Kernelfunktion, W'	81
Abbildung 6.4: Vergleich der Ergebnisse einer eindimensionalen Wellenausbreitungsberechnung mit Standard-SPH und normalem SPH-Verfahren	86
Abbildung 7.1: Kontaktberechnung mit Master-Slave-Algorithmus für den Kontakt zwischen Partikeln und Elementen	88
Abbildung 7.2: Eindimensionale Wellenausbreitungsberechnung mit Master-Slave-Algorithmus in AUTODYN. Links: Kontakt zwischen zwei Lagrange-Gittern. Rechts: Kopplung von Lagrange-Zellen mit SPH. Oben ist jeweils der Druck, unten die Geschwindigkeit dargestellt.	91
Abbildung 7.3: Implementierter Master-Slave-Algorithmus für den Kontakt zwischen Elementen und Partikeln in 2D	93
Abbildung 7.4: Wellenausbreitungsberechnung mit dem eigenen Master-Slave-Algorithmus für die Kopplung von SPH mit FE.	93
Abbildung 7.5: Kopplung mit Übergangselementen (Johnson, 1994)	94
Abbildung 7.6: Optionen der Kopplung von SPH mit Lagrange-Zellen in AUTODYN2D	95
Abbildung 7.7: Kopplung durch Modifikation der Ansatzfunktionen (Chen, Uras & Liu 1995)	97
Abbildung 7.8: Kopplung mit Übergangselementen (Belytschko et al., 1998).	98
Abbildung 7.9: Konzept der SPH-FE-Kopplung durch Erweiterung der Integration auf Elemente (zweidimensionales Beispiel)	100
Abbildung 7.10: Erweiterung der SPH-Summation durch Integration auf Elementen (2D), Aufsicht und Schnitt mit Kernel- bzw. Ansatzfunktionen	101
Abbildung 7.11: Diskretisierungen für die Approximation einer Beispielfunktion. Links: 10-10 Partikel. Rechts: Hybride Approximation mit 12-20 Partikeln und zwei mal 2-10 Elementen.	103
Abbildung 7.12: Testfunktion $f(x,y)=-\cos(x^2+y^2)$ links, Ableitung $\partial f/\partial y$ rechts	104
Abbildung 7.13: Approximationen von Testfunktion und Ableitung mit SPH	105
Abbildung 7.14: Approximationen von Testfunktion und Ableitung mit NSPH	105
Abbildung 7.15: Approximationen mit NSPH-FE-Kopplung	105
Abbildung 7.16: Vergleich zwischen Funktion und approximierten Funktionsverläufen in Schnitten parallel zur x-Achse. Links: reine SPH- bzw. NSPH-Approximation mit 10 Partikeln in y-Richtung, rechts hybride Approximation mit 2 Elementen, 12 Partikeln und nochmals 2 Elementen in y-Richtung.	106
Abbildung 7.17: Vergleich zwischen dem Gradienten der Funktion und dem approximierten Gradienten in Schnitten parallel zur x-Achse. Links: reine SPH- bzw. NSPH-Approximation mit 10 Partikeln in y-Richtung, rechts hybride Approximation mit 2	

Elementen, 12 Partikeln und nochmals 2 Elementen in y-Richtung. ....	107
Abbildung 7.18: Berechnung der Randkräfte auf Knoten, HA-S Kopplung. ....	110
Abbildung 7.19: Sichtbarkeitskriterium zur Überprüfung des Beitrags eines Partikels zur Randspannung an einem Knoten .....	111
Abbildung 7.20: Zuordnung der Kräfte aus der Wechselwirkung mit einem Partikel (HA-F- Kopplung) .....	112
Abbildung 7.21: Diskretisierung des Stahlstabes für die Berechnung des Wellenausbreitungsproblems mit einer Kopplung von FE und SPH (1:1) .....	113
Abbildung 7.22: Ausbreitung einer elastischen Welle. Geschwindigkeitsprofil nach 100 $\mu$ s bei reiner FE-Diskretisierung .....	114
Abbildung 7.23: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach 100 $\mu$ s bei reiner SPH- Diskretisierung (links) und mit normalem SPH-Verfahren (rechts). ....	115
Abbildung 7.24: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach 100 $\mu$ s bei Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Links: Welle läuft aus dem FE-Bereich in den SPH-Bereich, rechts: Welle läuft aus dem SPH- in den FE-Bereich. Die Grenzfläche liegt jeweils bei $x=50$ cm. ....	115
Abbildung 7.25: Geschwindigkeitsprofile nach 100 $\mu$ s bei Kopplung mit Übergangselementen. Die Welle läuft aus dem FE-Bereich in den SPH-Bereich, die Grenzfläche liegt bei $x=50$ cm. ....	116
Abbildung 7.26: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach 100 $\mu$ s bei Kopplung mit den neuen Verfahren HA-S (links) und HA-F (rechts). Die Welle läuft in beiden Fällen aus dem FE-Bereich (0 bis 50 cm) in den SPH-Bereich (50 bis 100 cm). ....	117
Abbildung 7.27: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach 100 $\mu$ s bei Kopplung mit dem neuen Verfahren HA-F. Links: Kopplung mit dem normalisierten SPH-Verfahren, die Welle läuft aus dem FE-Bereich in den SPH-Bereich. Rechts: ohne Normalisierung, die Welle läuft aus dem SPH- in den FE-Bereich. ....	117
Abbildung 7.28: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei reiner FE-Diskretisierung (links) und bei Kopplung mit Übergangselementen (rechts). ....	118
Abbildung 7.29: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Links: Grobe Auflösung im SPH-Bereich, Mitte: feinere Auflösung im SPH-Bereich, rechts: grobe Auflösung, Kopplung mit dem normalisierten SPH-Verfahren. ....	119
Abbildung 7.30: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem neuen HA-S Verfahren. Links: Grobe Auflösung im SPH-Bereich, rechts: feinere Auflösung im SPH-Bereich. ....	119
Abbildung 7.31: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem neuen HA-F Verfahren. Links oben: Grobe Auflösung im SPH- Bereich, rechts unten: feinste Auflösung im SPH-Bereich. ....	120
Abbildung 7.32: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei	

---

Kopplung mit dem neuen HA-F Verfahren. Die Welle läuft hier zunächst aus dem SPH-Bereich in den mit FE diskretisierten Bereich. ....	121
Abbildung 7.33: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem neuen HA-F Verfahren und Anwendung der Normalisierung im SPH-Bereich (mittlere Auflösung links, feine Auflösung rechts). ....	121
Abbildung 7.34: Druckentwicklung in Punkt 2 bei reiner FE-Diskretisierung. ....	121
Abbildung 7.35: Vergleich der Druckentwicklung in Punkt 2 bei reiner SPH-Diskretisierung (links) und diskretisierung mit dem normalisierten SPH-Verfahren (rechts) in verschiedenen Auflösungen. ....	122
Abbildung 7.36: Druckentwicklung in Punkt 2 bei Kopplung mit Übergangselementen. .	122
Abbildung 7.37: Vergleich der Druckentwicklung in Punkt 2 bei Kopplung mit dem HA-S-Verfahren und verschiedenen Auflösungen . ....	123
Abbildung 7.38: Vergleich der Druckentwicklung in Punkt 2 bei Kopplung mit dem HA-F-Verfahren und verschiedenen Auflösung. Standard-SPH-Verfahren links, normalisiertes SPH-Verfahren rechts. ....	123
Abbildung 7.39: Vergleich der Fehler in der Impulsübertragung bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten. ....	124
Abbildung 7.40: Vergleich der Fehler in der Energieübertragung bei reiner SPH- bzw. NSPH-Rechnung sowie bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten. .	125
Abbildung 7.41: Prinzip der h- und p-Adaptivität im Vergleich mit der adaptiven Umwandlung von Elementen in Partikel . ....	128
Abbildung 7.42: Einsatz der adaptiven Kopplung, um das Versagen von Elementen bei zu großen Deformationen zu verhindern. ....	129
Abbildung 7.43: Überschneidung der Einflußbereiche der neu generierten Partikel in einem unverzerrten (links) und verzerrten (rechts) Element . ....	130
Abbildung 7.44: Umwandlung eines Elementes in 1,4,9 oder 16 Partikel . ....	131
Abbildung 7.45: Platzierung der Partikel anhand der lokalen Koordinaten des zu ersetzenden Elementes . ....	132
Abbildung 8.1: Vereinfachte Darstellung der Berechnungsschritte mit Zuordnung zu Partikeln und Elementen . ....	138
Abbildung 8.2: Konzept von MassPoint und StressPoint zur Darstellung von Partikeln und Elementen . ....	139
Abbildung 8.3: Übersichtschema des entwickelten Datenmodells . ....	142
Abbildung 8.4: Übersicht über die implementierten Klassen . ....	145
Abbildung 9.1: Ergebnis des am Ernst-Mach-Institut, Freiburg, 1996 durchgeführten Penetrationsversuches und Darstellung der Projektilgeometrie (Weber, Hohler & Stilp, 1996) . ....	148
Abbildung 9.2: Geometrie des ebenensymmetrischen Problems mit Randbedingungen .	149
Abbildung 9.3: Lage und Nummern der betrachteten Referenzpunkte . ....	151

Abbildung 9.4: Betrachtete Diskretisierungen. Links: reine FE-Diskretisierung, rechts: Kopplung mit SPH-Methode und sofortiger Umwandlung (nicht adaptiv, 2 Partikel pro Elementseite) .....	152
Abbildung 9.5: Entwicklung der Diskretisierung bei adaptiver Kopplung (3 Partikel pro Elementseite). Links: nach 100 $\mu$ s, rechts: nach 500 $\mu$ s (rechts). .....	153
Abbildung 9.6: Vergleich der Geschwindigkeitsentwicklung im Projektil und Aluminiumblock (Punkt 3) bei reiner FE-Diskretisierung. Verschiedenen Netzfeinheiten (links), Variation des Erosionskriteriums (rechts). .....	154
Abbildung 9.7: Vergleich der Geschwindigkeitsentwicklung im Projektil und Aluminiumblock (Punkt 3). Links: bei reiner SPH-Diskretisierung und verschiedenen Auflösungen (Partikelgrößen). Rechts: Bei Kopplung von SPH-Methode und FE (nicht adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH-Bereich. ....	154
Abbildung 9.8: Geschwindigkeitsentwicklung im Projektil und Aluminiumblock (Punkt 3) bei adaptiver Kopplung von SPH-Methode und FE .....	154
Abbildung 9.9: Vergleich der Geschwindigkeitsverteilung nach 100 $\mu$ s für die Fälle FE 3 (reine FE-Diskretisierung) und SPH 1:3 (reine SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes). .....	155
Abbildung 9.10: Vergleich der Geschwindigkeitsverteilung nach 100 $\mu$ s für die Fälle FE-NSPH 1:3 (Anwendung der Kopplung mit dem NSPH-Verfahren, nicht adaptiv) und FE-NSPH (adaptiv) 1:3 (Anwendung der adaptiven Kopplung mit dem NSPH-Verfahren). .....	155
Abbildung 9.11: Effektive plastische Dehnung nach 500 $\mu$ s, Variante FE 3 (reine FE-Diskretisierung). .....	156
Abbildung 9.12: Effektive plastische Dehnung nach 500 $\mu$ s, Varianten SPH 1:2 und SPH 1:3 (reine SPH-Diskretisierung für den Aluminiumblock). .....	157
Abbildung 9.13: Effektive plastische Dehnung nach 500 $\mu$ s, Varianten FE-SPH 1:2 und FE-SPH 1:3 (Diskretisierung des Aluminiumblockes mit FE-SPH Kopplung, nicht adaptiv). .....	157
Abbildung 9.14: Effektive plastische Dehnung nach 500 $\mu$ s, Variante FE-NSPH 1:2 (Diskretisierung des Aluminiumblockes mit FE-NSPH Kopplung, nicht adaptiv). ....	158
Abbildung 9.15: Effektive plastische Dehnung nach 60, 100, 200 und 500 $\mu$ s, Variante FE-NSPH (Adaptiv) 1:3 (Anwendung der adaptiven Kopplung mit dem NSPH-Verfahren). .....	159
Abbildung 9.16: Effektive plastische Dehnung nach 500 $\mu$ s, Variante FE-SPH (Adaptiv) 1:3 (Anwendung der adaptiven Kopplung mit dem SPH-Verfahren) .....	159
Abbildung 9.17: Effektive plastische Dehnung nach 340 $\mu$ s, Variante FE-SPH (SPH-Proj.) 1:2 (Kopplung mit dem SPH-Verfahren, nicht adaptiv, SPH-Diskretisierung des Projektils). Rechts sind die Partikel des Projektils alleine dargestellt. ....	160
Abbildung 9.18: Ausbreitung der Druckwelle nach 10 $\mu$ s und 20 $\mu$ s, Variante FE-SPH 1:4	

---

(Kopplung mit dem SPH-Verfahren, nicht adaptiv). . . . .	161
Abbildung 9.19: Vergleich der berechneten Druckverteilung nach 100 $\mu$ s, Varianten FE 1 (links) und FE 3 (rechts) (reine FE-Diskretisierung). . . . .	161
Abbildung 9.20: Vergleich der berechneten Druckverteilung nach 100 $\mu$ s, Varianten SPH 1:2 (links) und SPH 1:3 (rechts) (reine SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes). . . . .	162
Abbildung 9.21: Vergleich der berechneten Druckverteilung nach 100 $\mu$ s, Varianten FE-SPH (adaptiv) 1:3 (links) und FE-NSPH (adaptiv) 1:3 (rechts) (Anwendung der adaptiven Kopplung). . . . .	162
Abbildung 9.22: Vergleich der Druckentwicklung im Referenzpunkt 3. Reine FE-Diskretisierung mit verschiedenen Netzfeinheiten (links), reine SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes (rechts). . . . .	163
Abbildung 9.23: Vergleich der Druckentwicklung im Referenzpunkt 3 bei Kopplung mit der SPH-bzw. NSPH-Methode (nicht adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH-Bereich. . . . .	163
Abbildung 9.24: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 7 und 8 bei reiner FE- (links) und reiner SPH-Diskretisierung (rechts) des Aluminiumblockes. . . . .	164
Abbildung 9.25: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 7, 8 und 9 bei Anwendung der Kopplung (nicht adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH-Bereich. . . . .	164
Abbildung 9.26: Vergleich der Entwicklung des Energiefehlers bei reiner FE- (links) und reiner SPH-Diskretisierung (rechts) des Aluminiumblockes und verschiedenen Auflösungen. . . . .	165
Abbildung 9.27: Vergleich der Entwicklung des Energiefehlers bei Anwendung der Kopplung (links: nicht adaptiv, rechts: adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH- bzw. NSPH-Bereich . . . . .	166
Abbildung 9.28: Berechnungsdauer für einen Zeitschritt bei Variation des mit Partikeln diskretisierten Anteils des Aluminiumblockes . . . . .	167
Abbildung 9.29: Entwicklung der Berechnungsdauer pro Zeitschritt bei Einsatz der adaptiven Kopplung und Verwendung von 3 Partikeln pro Elementseite. . . . .	167
Abbildung 9.30: Diskretisierung in der dreidimensionalen Berechnung mit adaptiver Umwandlung von Hexaederelementen des Aluminiumblockes in Partikel. Zustand nach 60 $\mu$ s. Die Partikel sind als kleine Quader dargestellt, die Farbe gibt einen Geschwindigkeitsbereich an (hellgrün: ca. 250-350 cm/ $\mu$ s). . . . .	169
Abbildung 9.31: Ergebnis der dreidimensionalen Berechnung mit adaptiver Umwandlung von Hexaederelementen des Aluminiumblockes in Partikel. Dargestellt sind die Spannungen in y-Richtung (links) und z-Richtung (rechts) in einem Schnitt 3 cm von der Oberfläche des Aluminiumblockes. Die Größeren Punkte sind Elementmittelpunkte, die kleinen Punkte im Zentrum sind Partikel des Projektils und Partikel aus umgewandelten Elementen des Aluminiumblockes. . . . .	170

---

Abbildung 9.32: Übereinstimmung der Ergebnisse bei reiner SPH-Diskretisierung des Ziels (links) und Anwendung der adaptiven Kopplung von Elementen und Partikeln (rechts). .....	171
Abbildung 12.1: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Links: grobe Auflösung, Mitte: mittlere Auflösung, rechts: Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens .....	186
Abbildung 12.2: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit Übergangselementen. ....	186
Abbildung 12.3: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-S Variante des neuen Kopplungsverfahrens bei grober und mittlerer Auflösung im SPH-Bereich. ....	186
Abbildung 12.4: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-F Variante des neuen Kopplungsverfahrens bei grober und mittlerer Auflösung im SPH-Bereich. ....	187
Abbildung 12.5: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-F Variante des neuen Kopplungsverfahrens bei grober, mittlerer und feiner Auflösung im SPH-Bereich. ....	187
Abbildung 12.6: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei reiner SPH-Diskretisierung und mittlerer (links) bzw. feiner Auflösung (rechts). ....	189
Abbildung 12.7: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei reiner SPH-Diskretisierung und grober (links) bzw. mittlerer Auflösung (rechts). ....	189
Abbildung 12.8: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Da nur Druckkräfte übertragen werden können, findet nur eine einmalige Energieübertragung vom FE-Bereich in den SPH-Bereich statt. ....	189
Abbildung 12.9: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-SPH-Kopplung mit Übergangselementen. ....	190
Abbildung 12.10: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-S-Variante des neuen Kopplungsverfahrens. Links: grobe Auflösung links, rechts: mittlere Auflösung. ....	190
Abbildung 12.11: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-F-Variante des neuen Kopplungsverfahrens. Links: grobe Auflösung links, rechts: feine Auflösung. ....	190
Abbildung 12.12: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-NSPH-Kopplung (Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens) mit der HA-F-Variante des neuen Kopplungsverfahrens. Links: grobe Auflösung, rechts: feine Auflösung. ....	191

**Tabellen:**

Tabelle 9.1: Verwendete Materialparameter .....	150
Tabelle 9.2: Betrachtete Berechnungsvarianten .....	151

## Notation, verwendete Symbole

$\cdot$	Ableitung nach der Zeit (Punkt über dem abzuleitenden Symbol)
$\nabla$	Gradient, Ableitung nach dem Ort, im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem der vektorielle Operator [ $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ ]
$\cdot$	Skalarprodukt, z.B. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = c$ , bzw. $a_i b_i = c$
:	Tensorielles Produkt $\mathbf{A} : \mathbf{B} = c$ , bzw. $A_{ij} B_{ij} = c$
$\otimes$	Dyadisches Produkt, z.B. $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{C}$ , bzw. $a_i b_j = C_{ij}$
$\delta$	Kronecker Delta, Diracsche Deltafunktion
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{a}, a_i$	Beschleunigungsvektor
$e$	spezifische innere Energie
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Green-Lagrange'scher Dehnungstensor
$\mathbf{F}$	Kraft
$G$	Schubmodul
$\gamma$	Quotient der spezifischen Wärmekapazitäten $c_p$ und $c_v$
$\mathbf{J}$	Jacobi-Matrix
$K$	Kompressionsmodul
$\kappa$	Isentropen- oder Adiabatenexponent
$m$	Masse
$\mu$	Kompressionsparameter: $\mu = \rho/\rho_0 - 1$
$\lambda_L, \mu_L$	Lamé-Konstanten
$p$	hydrostatischer Druck
$\rho$	Dichte
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor der Cauchy-Spannungen
$\mathbf{S}, S_{ij}$	Spannungsdeviator
$t$	Zeit
$\Theta$	Temperatur
$\mathbf{u}_p$	Partikelgeschwindigkeit
$U$	Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle oder Schockfront
$\mathbf{v}, v_i$	Geschwindigkeitsvektor
$V$	Volumen
$\mathbf{x}, x_i$	Ortsvektor
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$\Omega$	Gebiet
$\Gamma$	Gebietsrand, in Zustandsgleichungen: Grüneisen-Parameter

Es gilt, wenn nichts Gegenteiliges angemerkt ist, in der Indexschreibweise die *Einsteinsche*

*Summationskonvention*, 
$$p_{ij} x_j \equiv \sum_j p_{ij} x_j$$



## 1. EINLEITUNG

Die Berechnung von Impaktvorgängen gehört nicht unbedingt zu den alltäglichen, dafür aber umso interessanteren Aufgabenstellungen der Strukturmechanik. Dabei sind Impaktvorgänge in vielfacher Hinsicht von Bedeutung: kleinere oder größere Katastrophen wie der Einschlag eines Steines auf eine Glasscheibe, ein Zusammenstoß von Automobilen oder der Zusammenprall eines Vogels mit einem Flugzeug sind Ereignisse, die ein hohes Risiko für Menschenleben und für materielle Werte darstellen können. Als Impaktvorgang sind daneben auch besondere Fertigungsverfahren, wie das Tiefziehen von Blechen, Explosivschweißen und dergleichen, zu betrachten. Alltag sind Impaktvorgänge in der Wehrtechnik: die Durchschlagskraft von Geschossen, die Möglichkeit, mit geeigneten Penetratoren auch meterdicke Betonwände zu durchstoßen oder umgekehrt der Schutz von Menschen, baulichen Anlagen oder Geräten vor zerstörenden Waffenwirkungen sind hier Aspekte von zentraler Bedeutung.

Die Analyse von Impaktvorgängen stellt in vielerlei Hinsicht besondere Anforderungen. Im Unterschied zur klassischen Mechanik starrer und verformbarer Körper sind Trägheitseffekte immer zu berücksichtigen. Durch die Ausbreitung von Spannungs- oder Druckwellen kann das Material zerstört oder vorgeschädigt werden, bevor sich tatsächliche große Verformungen einstellen. Das Materialverhalten selbst ist in einem sehr weiten Spektrum zu beschreiben: die auftretenden großen Verformungen führen dazu, daß die ablaufenden Prozesse ohne die Berücksichtigung plastischen Verhaltens und besonders auch des Werkstoffversagens (Bruch, Fragmentierung) nicht charakterisiert werden können.

Zur Analyse und Prognose von Impaktvorgängen stehen verschiedene Vorgehensweisen zur Verfügung. Aus statistisch ausgewerteten Versuchen im Real- oder Modellmaßstab können empirische Modelle abgeleitet werden. Sogenannte „Ingenieurmodelle“ erlauben auf der Grundlage der physikalischen Erhaltungsgleichungen und entsprechender Versuchsergebnisse mit vereinfachenden Annahmen die Simulation eines Impaktvorgangs. Die dritte Möglichkeit schließlich besteht in der Berechnung mit den diskretisierenden Methoden der Mechanik. Die Körper werden in einzelne kleine Teile zerlegt, deren Verhalten, wiederum auf der Grundlage der physikalischen Erhaltungsgleichungen und der Ergebnisse aus Versuchen, vergleichsweise einfach beschrieben werden kann. Diese Teile können rechnerisch miteinander interagieren, durch die Interaktion läßt sich das Verhalten des Gesamtsystems ermitteln.

Die mathematischen Grundlagen für die diskretisierenden Methoden wurden bereits gegen Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelt (z. B. Ritz, 1909). Sie erleben einen Aufschwung seit Beginn der Entwicklung leistungsfähiger elektronischer Rechenanlagen Ende

der fünfziger Jahre und haben sich mittlerweile zum unverzichtbaren Werkzeug für Naturwissenschaftler und Ingenieure entwickelt und entsprechend große Verbreitung gefunden. Dabei wurden zunächst Verfahren verwendet, bei denen die zu untersuchende Struktur durch ein regelmäßiges Gitter abgebildet wurde. Ein derartiges Gitter ist sehr einfach zu erzeugen und benötigt im Rechner wenig Speicherplatz, außerdem arbeiten Berechnungsverfahren für regelmäßige Gitter sehr effizient. Allerdings sind regelmäßige Gitter nur bedingt geeignet, Randbedingungen auf beliebig geformten Körpern abzubilden. In der Natur der mathematischen Verfahren liegt es zudem, daß, deren Konvergenz vorausgesetzt, eine Berechnung umso genauer werden kann, je feiner die Auflösung des Gitters ist. Diese beiden Punkte führten bald zur Verwendung unregelmäßiger Gitter mit unterschiedlich hoher Auflösung, die dort am größten ist, wo die höchste Genauigkeit erforderlich ist. Auf dieser Basis arbeiten heute die meisten der verbreiteten Berechnungsprogramme, die auf der Methoden der Finiten Elemente (FE) und der Finiten Differenzen (FD) beruhen.

Während in der Fluidmechanik vorwiegend Verfahren zum Einsatz kommen, die die Bewegung des Fluids durch ein feststehendes Gitter beschreiben (Euler-Diskretisierung), werden in der Strukturmechanik bevorzugt Methoden verwendet, bei denen sich das Berechnungsgitter mit der Struktur verformt (Lagrange-Diskretisierung). Impaktvorgänge bewegen sich aber in einem Bereich dazwischen, denn die auftretenden großen Verformungen begrenzen die Anwendbarkeit eines sich mit dem Körper verformenden Gitters, insbesondere wenn Materialversagen und Bruch eintreten. Die Anwendung eines raumfesten Gitters dagegen ist aufwendig, weil die Bewegung mehrerer verschiedener Körper und Materialien einschließlich der Grenzflächen zwischen ihnen durch das Gitter abgebildet werden muß. Dieses Gitter muß daher sehr fein aufgelöst sein.

Neben gitterbasierten Verfahren wird bereits seit den sechziger Jahren versucht, auch gitterfreie (oder „netzfreie“) Verfahren in der Berechnung von Impaktvorgängen einzusetzen (Harlow, 1964). Methoden wie das in dieser Arbeit behandelte Verfahren der „Smoothed Particle Hydrodynamics“ (SPH) benötigen im Gegensatz zu gitterbasierten Verfahren wie FE oder FD keine topologischen Verbindungen zwischen Berechnungspunkten. Sie können daher die Vorteile der Lagrangeschen Beschreibung (körperfeste Koordinaten) und der Eulerschen Beschreibung (beliebige Verformbarkeit) vereinen.

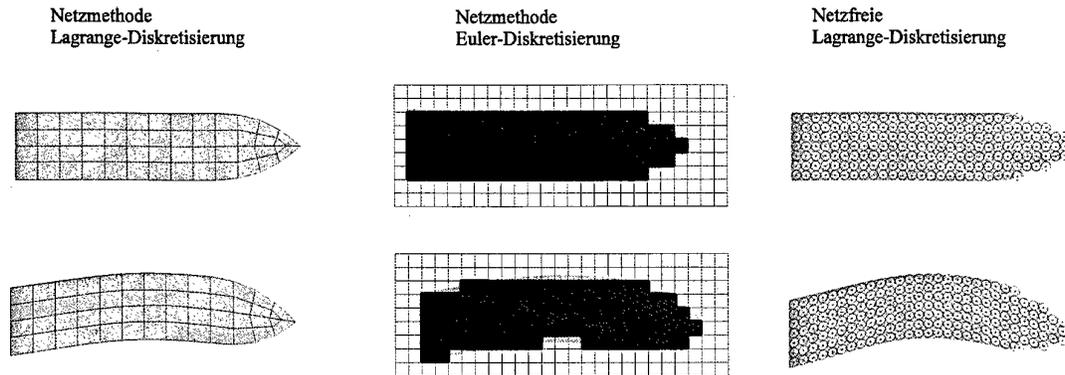


Abbildung 1.1: Verschiedene Diskretisierungsverfahren

## 1.1 Ausgangssituation

Für die Berechnung von Impaktvorgängen bei hohen Geschwindigkeiten, bei denen auch die Ausbreitung von Druckwellen eine große Rolle spielt, werden die sogenannten „Hydrocodes“ oder „Wave-Propagation-Codes“ eingesetzt, die sich durch die folgenden Merkmale von den Standardverfahren für Bauwerke und Strukturen unter statischen und dynamischen Lasten unterscheiden:

- explizite Zeitintegration
- die Verwendung spezieller numerischer Verfahren für die Modellierung von Schockwellen sowie
- eine Formulierung des Materialverhaltens auf der Grundlage der Trennung in Druck, der durch eine Zustandsgleichung („Equation of state“, EOS) berechnet wird, und deviatorische Anteile des Spannungstensors, die in einer Ratenformulierung berechnet werden.

Hydrocodes sind dabei grundsätzlich sowohl für die Berechnung von Festkörpern als auch für die Simulation des Verhaltens von Fluiden geeignet.

Bis vor wenigen Jahren basierten alle in größerem Umfang in praktischen Berechnungen eingesetzten Hydrocodes auf Netzverfahren (FE und FD). Größere Aufmerksamkeit erlangen netzfremde Hydrocodes, seit die ursprünglich für astrophysikalische Problemstellungen entwickelte SPH-Methode (Lucy, 1977, Gingold & Monaghan, 1977) zur Berechnung festigkeitsorientierter Aufgaben erweitert wurde (Libersky & Petschek, 1991).

Der Preis für die Verwendung netzfreier Methoden ist ein höherer numerischer Aufwand, der aus dem Fehlen einer topologischen a-priori-Beschreibung resultiert, denn die Interaktion der

netzfreien Teilchen (oder Partikel) ist erst im Verlauf der Rechnung selbst zu bestimmen. Daher besteht ein Bedarf an Verfahren, die es ermöglichen, netzfreie und netzbasierte Methoden bei der Berechnung von Impaktvorgängen gemeinsam zu verwenden. Damit ist der höhere Aufwand der netzfreien Berechnung auf die Bereiche großer Verzerrungen zu beschränken, in denen er tatsächlich gegenüber der netzbasierten Methode Vorteile bringt. Ein solches Verfahren sollte adaptiv arbeiten können, so daß eine Umwandlung von Elementen in Partikel aufgrund festzulegender Kriterien während der Berechnung automatisch erfolgt.

## 1.2 Problemstellung und Motivation

Bei einigen der in jüngerer Zeit entwickelten netzfreien Verfahren, insbesondere der Element-Free Galerkin (EFG) Methode (Belytschko et al., 1996), läßt sich eine Kopplung mit Finiten Elementen relativ einfach bewerkstelligen. Diese Methoden basieren auf der Integration der schwachen Form mit Hilfe eines Hintergrundnetzes, die „Knoten“ im netzfreien Bereich können sich unabhängig vom Hintergrundnetz bewegen. Dieses Hintergrundnetz kann durch Übergangselemente mit den Finiten Elementen verbunden werden. Eine weitere Möglichkeit zur Kopplung solcher netzfreier Verfahren an Finite Elemente stellt die Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren (Hegen, 1996) dar.

Hintergrundnetze lassen sich problemlos bei statischen, quasistatischen und dynamischen Aufgabenstellungen mit geringen Verformungen verwenden. Bei hohen Impaktgeschwindigkeiten, Fragmentierung und Phasenübergängen sind dagegen die SPH-Methode und die direkt von ihr abgeleiteten Verfahren wie das normalisierte SPH-Verfahren (Randles & Libersky, 1996) oder MLSPH (Dilts, 1999) im Vorteil, weil sie kein Hintergrundnetz benötigen, das in diesen Fällen während der Berechnung angepaßt werden müßte. Die Verfahren beruhen vielmehr auf der starken Form der Differentialgleichungen, die Differentialgleichungen werden nur an den „Knoten“ bzw. Partikeln selbst ausgewertet.

Eine Kopplung der SPH-Methode mit finiten Elementen wurde zuerst von Johnson (1994) sowie Attaway, Heinstein & Swegle. (1994) realisiert. Sie basiert auf dem von der Kontaktberechnung zwischen Elementen bekannten Master-Slave-Verfahren und erlaubt die Berechnung von Reaktionskräften zwischen sich einander nähernden Partikeln und Elementen, jedoch keine Übertragung von Zug- oder Schubspannungen. Dennoch wurde sie von Johnson (1994, 1996) auch für eine adaptive Umwandlung von Elementen in Partikel in zweidimensionalen Berechnungen verwendet. Johnson (1994) schlägt außerdem eine Fixierung von Partikeln auf den Knoten des Netzrandes vor, die er jedoch nicht adaptiv einsetzt. Der Einflußbereich für die Bestimmung der Deformationsraten der auf diese Weise fixierten Partikel ist auf die benachbarten Partikel beschränkt, die benachbarten Elemente werden nicht berücksichtigt. Welchen Einfluß diese Näherung hat, wurde bislang nicht untersucht. Hayhurst, Clegg & Livingstone,

(1996) realisierten eine Kopplung von SPH mit einem Finite-Differenzen-Verfahren im Hydrocode AUTODYN, ebenfalls auf der Grundlage einer Kontaktberechnung. Der Einsatz dieser Kopplung in einer adaptiven Berechnung, bei der verzerrte Differenzzellen durch Partikel ersetzt werden, führt nach den Autoren jedoch zur Berechnung unphysikalischer Geschwindigkeiten.

Ein Forschungsbedarf zur Kopplung von SPH und FE besteht in den nachfolgend genannten Punkten:

- Die Auswirkungen der Näherungen, auf denen bestehende Verfahren zur Kopplung basieren, sind zum Teil nicht bekannt.
- Es ist noch nicht gelungen, SPH-Methode und Finite Elemente so zu koppeln, daß in einem adaptiven Verfahren ein kontinuierlicher Spannungszustand repräsentiert wird. Erst hierdurch wird jedoch die effiziente Verwendung beider Methoden innerhalb eines einzelnen, bereichsweise großen Verformungen unterworfenen Bauteils möglich.
- Bislang gibt es noch keine Untersuchungen darüber, wie ein Verfahren auf der Basis einer adaptiven Umwandlung von Elementen in Partikel in einer objektorientierten Programmiersprache effizient implementiert werden kann. Die bekannten Programme, die eine Kopplung anbieten, sind seit längerem bestehende, kontinuierlich erweiterte Fortran-Programme. Das Schreiben eines neuen Programmes in der Programmiersprache C++ bietet die Möglichkeit, den Programmcode von Anfang an für die Verwendung der beiden Diskretisierungsverfahren optimal zu strukturieren. Um dabei die Vorteile der objektorientierten Programmierung - Übersichtlichkeit, Wiederverwendbarkeit von Programmcode - nutzen zu können, sind geeignete Konzepte und Datenstrukturen zu entwickeln.

### 1.3 Zielsetzung

Aus dem oben genannten Forschungsbedarf leitet sich die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ab. Zentrales Thema ist die Entwicklung eines neuen Verfahrens zur Berechnung von Impaktvorgängen, das auf einer Kopplung von Finiten Elementen mit dem SPH-Verfahren basiert. Diese Kopplung soll so erfolgen, daß nicht nur Kräfte über die Grenzfläche hinweg ausgetauscht werden, sondern auch eine Kopplung der Verformungsbedingungen bzw. Deformationsraten erfolgt. Die Implementierung in einem eigenen Computerprogramm soll auf der Grundlage einer zu entwickelnden Datenstruktur erfolgen, die eine konsistente Beschreibung netzbasierter und netzfreier Verfahren ermöglicht, so daß das Programm eine adaptive Verwendung der SPH-Methode für ein zu Berechnungsbeginn durch Finite Elemente diskretisiertes Problem ermöglicht.

Hierzu werden in der vorliegenden Arbeit zunächst die grundlegenden Eigenschaften und die verwendeten Formulierungen für die implementierten netzbasierten (FE) und netzfreien (SPH)

Hydrocodes dargestellt. Dabei wird insbesondere auf die besonderen Merkmale der SPH-Methode und Verbesserungen hinsichtlich der Konsistenz des Verfahrens eingegangen.

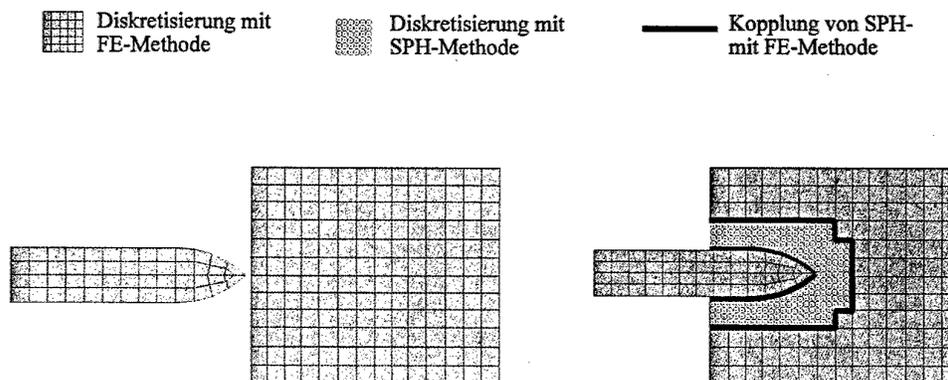


Abbildung 1.2: Prinzip des adaptiven Einsatzes der Kopplung von SPH und FEM bei einer Penetrationsberechnung

Anschließend werden die aus der Literatur bekannten Ansätze für eine Kopplung untersucht, hinsichtlich ihrer Eignung für ein adaptives Verfahren verglichen und einem eigenen, neu entwickelten Verfahren gegenübergestellt. Die Untersuchung der Eigenschaften der Verfahren und ihrer Eignung für die Berechnung von Impaktproblemen erfolgt sowohl auf theoretischer Ebene als auch an numerischen Testfällen, deren Ergebnisse mit analytischen Lösungen verglichen und diskutiert werden.

Ein weiterer Aspekt der vorliegenden Arbeit ist die Verwendung objektorientierter Methoden bei der Erstellung des Datenmodells und der Umsetzung des Berechnungsverfahrens in ein Computerprogramm. Im Rahmen der Arbeit wurde auf der Basis des Datenmodells das SPH-Programm SOPHIA (Hiermaier, 1996) modifiziert und erweitert und mit einem vollständig neu erstellten FE-Hydrocode in einem adaptiv arbeitenden Programm integriert.

Abschließend wird die Anwendbarkeit des gekoppelten Verfahrens in einer beispielhaften Impaktberechnung anhand von Vergleichsrechnungen mit reiner Fe- bzw. SPH-Diskretisierung überprüft.

## 2. GRUNDLAGEN AUS DER MECHANIK

In den ersten drei Abschnitten dieses Kapitels werden einige kontinuumsmechanische Grundlagen und Besonderheiten der verwendeten Formulierung dargestellt, soweit sie für die Problemstellung von Relevanz sind. Der letzte Abschnitt erläutert einige Grundlagen zur Wellenausbreitung in Festkörpern und Gasen, die Bauingenieuren nicht unbedingt geläufig, für das weitere Verständnis jedoch wesentlich sind.

### 2.1 Kinematische Beschreibung des Kontinuums

Kennzeichen für die in dieser Arbeit behandelten Berechnungsaufgaben sind sehr große Verformungen, die, wenn das Material seine Festigkeit verloren hat, bis zu einem fluidartigen Verhalten reichen können. Deswegen muß eine geeignete kinematische Beschreibung gewählt werden, die diesen Anforderungen gerecht wird. Aufbauend auf der Darstellung geeigneter Koordinatensysteme wird in diesem Abschnitt daher die Art und Weise, wie Deformationen in Hydrocodes beschrieben werden, erläutert.

#### 2.1.1 Koordinatensysteme

Das kartesische Koordinatensystem und Zylinderkoordinaten sind die beiden für die betrachteten Aufgabenstellungen am häufigsten verwendeten Koordinatensysteme. Die Bezeichnungen der Koordinaten sind in Abbildung 2.1 mit Bezug auf die Einheitsvektoren  $e_x$ ,  $e_y$  und  $e_z$  dargestellt. Zylinderkoordinaten werden vor allem bei axialsymmetrischen Problemen verwendet: wenn die „r-Achse“ auf der Symmetrieachse liegt, können eigentlich dreidimensionale Probleme effizient in einem zweidimensionalen Raum ( $r, z$ -Raum) berechnet werden. Dies kann beispielsweise der Fall sein für Penetrationsberechnungen mit senkrechten Aufschlag.

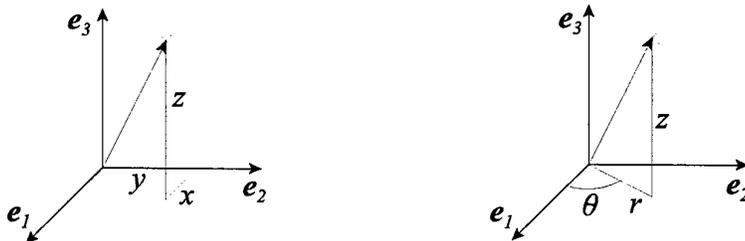


Abbildung 2.1: Kartesisches Koordinatensystem und Zylinderkoordinaten

Da die Berechnung räumlicher Ableitungen im folgenden häufiger vorkommt, werden die

wichtigsten Beziehungen hier dargestellt. Den Koordinatenrichtungen  $x$ ,  $y$ , und  $z$  entsprechen dabei die Indizes 1, 2 und 3.

Der Gradient eines Skalarfeldes  $\phi$  ist der Vektor

$$\bar{\nabla}\phi = \nabla_i\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}e_3 \quad (2.1)$$

Die räumliche Ableitung eines in kartesischen Koordinaten gegebenen Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  ist der Tensor mit den angegebenen Komponenten

$$\bar{\nabla}\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \nabla = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

Die Divergenz des Vektorfeldes ist

$$\bar{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla_i v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{tr}(\bar{\nabla}\mathbf{v}) \quad (2.3)$$

Die entsprechenden Ausdrücke in Zylinderkoordinaten lauten

$$\bar{\nabla}\phi = \nabla_i\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}e_z$$

$$\bar{\nabla}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - v_\theta\right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_r\right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \bar{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{tr}(\bar{\nabla}\mathbf{v})$$

Der Faktor  $1/r$ , der bei der Berechnung der Gradienten in Zylinderkoordinaten auftaucht, führt bei Verwendung der Zylindersymmetrie zu einer mathematischen Singularität in der Symmetrieachse. Diese Singularität ist in numerischen Berechnungsverfahren durch besondere Methoden zu behandeln, für das netzfreie SPH-Verfahren fehlen hier noch robuste Standardlösungen. Solche Methoden sind jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit, im folgenden werden daher nur kartesische Koordinaten verwendet.

### 2.1.2 Materielle (Lagrangesche) und räumliche (Eulersche) Beschreibung

Für die Beschreibung der Eigenschaften eines sich bewegenden oder verformenden Kontinuums stehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

1. Die materielle (Lagrangesche) Beschreibung wird an materielle Punkte gekoppelt, das heißt, jede Größe  $\Theta$  ist gegeben durch die Lage an einem bestimmten Punkt  $\mathbf{X}$  eines Körpers in der sogenannten Referenzkonfiguration, daneben ist  $\Theta$  veränderlich in der Zeit

$$\Theta = \hat{\Theta}(X, t) \quad (2.5)$$

2. Die räumliche (Eulersche) Beschreibung erfolgt in einem ortsfesten Koordinatensystem, jede Größe ist gegeben an einem Ort  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$

$$\Theta = \tilde{\Theta}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

Beide Beschreibungen lassen sich ineinander überführen, wenn die Koordinaten  $\mathbf{x}(X, t)$  oder das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(X, t)$  oder  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  gegeben sind.

Als materielle Ableitung wird die Ableitung nach der Zeit für eine Größe an einem materiellen (körperfesten) Punkt bezeichnet. Sie läßt sich in kartesischen Koordinaten mit folgendem Zusammenhang durch die raumfeste Ableitung ausdrücken:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{D\hat{\Theta}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\Theta} + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} \quad (2.7)$$

In Indexschreibweise lautet der Zusammenhang

$$\frac{D\Theta}{Dt} = v_i \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Der Unterschied zwischen materieller und räumlicher Beschreibung zeigt sich beispielsweise bei der Formulierung des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung. Da die Beschleunigung definiert ist als Rate der Geschwindigkeitsänderung eines Partikels ist sie zu berechnen als materielle Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes. Ist dieses in der Form  $\mathbf{v}(X, t)$  gegeben, ist die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(X, t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

Dagegen ergibt sich für die räumliche Beschreibung  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.10)$$

Dieser Unterschied wirkt sich auch bei der Formulierung eines diskretisierenden Berechnungsverfahrens aus. Werden alle Größen in einem raumfesten Berechnungsgitter angegeben, wie bei der Berechnung von Fluiden im allgemeinen üblich, sind die konvektiven Terme ( $v_i (\partial \Theta / \partial x_i)$  in 2.8) immer zu berücksichtigen. Dies führt zu höherem Rechenaufwand und geringerer Genauigkeit, die durch eine höhere Auflösung auszugleichen ist. Gleichwohl ist für viele Aufgaben eine Eulersche Beschreibung die einzig sinnvolle Alternative.

In der vorliegenden Arbeit wird dagegen nur die materielle Beschreibung verwendet. Sie bietet neben den genannten noch weitere Vorteile für die betrachteten Problemstellungen. Zeitlich veränderliche Größen, die den Materialzustand an einem materiellen Punkt beschreiben, müssen nicht durch das feste Gitter „transportiert“ werden. Grenzflächen zwischen verschiedenen Körpern oder Materialien lassen sich auf einfache Weise exakt beschreiben.

### 2.1.3 Beschreibung der Deformation

Die im Bauingenieurwesen übliche Art und Weise der Deformationsbeschreibung geht aus von der Definition eines Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(X, t) - X \quad (2.11)$$

Verzerrungsmaße wie der Greensche oder der Almansische Verzerrungstensor für finite Deformationen oder auch der infinitesimale Dehnungstensor  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \right), \quad \text{bzw. } E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.12)$$

für den Fall infinitesimal kleiner Deformationen charakterisieren dabei die Materialverformung aus der Beziehung zwischen den materiellen Koordinaten im verformten (Momentankonfiguration) und unverformten Kontinuum (Referenzkonfiguration).

Die in dieser Arbeit - und allgemein in Hydrocodes - verwendete Deformationsbeschreibung weicht von dieser Vorgehensweise ab. Für die betrachteten Problemstellungen sind Beschreibungen, die sich auf eine Referenzkonfiguration beziehen, nicht geeignet, denn sie können das fluidartige Verhalten sehr hohen Drücken ausgesetzten Materials nicht beschreiben.

Aus diesem Grunde erfolgt keine explizite Beschreibung der Deformationen, vielmehr werden die Änderungsraten der Deformation benutzt, wie im nächsten Abschnitt beschrieben. Die zeitliche Diskretisierung (vgl. Kapitel 4) mit einem expliziten Verfahren führt dabei dazu, daß innerhalb eines einzelnen Zeitschrittes nur sehr kleine Deformationen auftreten. Diese inkrementellen Deformationen können näherungsweise als infinitesimal klein betrachtet werden. Die Summe der inkrementellen Deformationen eines Partikels über die Zeit stellt dann allerdings kein physikalisch sinnvolles Dehnungsmaß mehr dar. Nur wenn auch die Summe der Dehnungsinkremente klein bleibt, können die so berechneten Dehnungen als Komponenten eines infinitesimalen Dehnungstensors betrachtet werden.

### 2.1.4 Zeitliche Änderung der Deformation

Die Berechnung der inkrementellen Deformationen kann über die Ableitungen des Verschiebungsfeldes geschehen. Eine effektivere und daher auch in Hydrocodes verwendete Möglichkeit ist die in diesem Abschnitt erläuterte Formulierung in Deformationsraten: das Verschiebungsfeld muß hierzu nicht ermittelt werden, die Berechnung erfolgt vielmehr direkt aus dem Geschwindigkeitsfeld.

Ausgangspunkt ist die Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten  $\nabla \mathbf{v}$  in den symmetrischen Deformationsratentensor  $\mathbf{D}$  und den Rotationsraten- oder „spin“-Tensor  $\mathbf{W}$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.13)$$

Der Deformationsratentensor wird oftmals als Dehnratentensor  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  bezeichnet, diese Bezeichnung

ist jedoch eigentlich nicht ganz korrekt, denn die Summation der Deformationsinkremente, die durch Multiplikation von  $D$  mit der Zeitschrittlänge berechnet werden, zu einer Gesamtdehnung ist, wie oben beschrieben, nur in Ausnahmefällen zulässig.

Abschließend sei noch der Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\omega$  erwähnt. Er läßt sich aus dem Rotationsratentensor berechnen (für kartesische Koordinaten) nach

$$\omega = -(W_{23}e_1 + W_{31}e_2 + W_{12}e_3) \quad (2.14)$$

Der in der Fluidmechanik häufig verwendete Wirbeltensor entspricht dem verdoppelten Rotationsratentensor  $2W$ .

## 2.2 Spannungsbeschreibung

### 2.2.1 Verwendeter Spannungstensor

In Hydrocodes und auch in der vorliegenden Arbeit wird der Tensor der Cauchy-Spannungen verwendet. Er ist definiert als die Transformation  $\sigma$ , welche für eine beliebige Schnittfläche  $S$  durch einen Körper an der Stelle  $P$  mit Normalenvektor  $n$  den Spannungsvektor

$$t = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (2.15)$$

ergibt nach

$$t = \sigma n \quad (2.16)$$

Die Cauchy-Spannungen (bzw.  $F$  und  $S$ ) sind dabei in der Momentankonfiguration definiert.

Aus den gleichen Gründen, aus denen die Beschreibung der Deformationen nicht mit Hilfe des Formalismus für finite Deformationen durchgeführt wird, kann auch in der Spannungsbeschreibung nicht auf die Referenzkonfiguration zurückgegriffen werden, wie es etwa für die Verwendung des ersten oder zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors der Fall sein müßte.

### 2.2.2 Aufteilung in Druck und Spannungsdeviator

Die Beschreibung des Materialverhaltens erfolgt getrennt für den Druck und die deviatorischen Anteile des Spannungstensors. Zum einen sind für sehr hohe Drücke Materialbeziehungen für die deviatorischen Anteile aus Versuchen praktisch nicht mehr zu ermitteln, zum anderen sind die Auswirkungen dieser Anteile im Gegensatz zum Einfluß der Druck-Dichte-Energie Relation bei derartigen Belastungen vernachlässigbar klein. Die Aufteilung in Druck und deviatorische Anteile erlaubt eine einheitliche Beschreibung des Spannungszustandes über den gesamten Belastungsbereich.

Der Zusammenhang zwischen Druck  $p$  und dem vollständigen Spannungstensor lautet

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (2.17)$$

Der Spannungsdeviator  $S$  ist

$$S = \sigma + pI \quad (2.18)$$

### 2.2.3 Objektive Spannungsraten

Wenn Spannungen durch eine Integration über die Zeit aus Spannungsraten berechnet werden sollen, wie es bei der Formulierung in Hydrocodes der Fall ist, muß hierzu eine objektive Spannungsrate verwendet werden, Starrkörperdrehungen dürfen keine Spannungszuwächse hervorrufen. Mit anderen Worten, der Spannungstensor muß „mitrotieren“, wenn eine Starrkörperdrehung vorliegt; die Komponenten des Spannungstensors, die auf die kartesischen Koordinatenrichtungen bezogen sind, müssen angepaßt werden. Die materielle Ableitung des Spannungstensors selbst ist nicht objektiv, die Jaumannsche Spannungsableitung („co-rotational stress rate“,  $D_{cr}\sigma/Dt$ ) dagegen ist objektiv, sie leistet diese Anpassung:

$$\frac{D_{cr}\sigma}{Dt} = \frac{D\sigma}{Dt} + \sigma W - W\sigma \quad (2.19)$$

$W$  ist hier der bereits eingeführte Rotationsratentensor. Damit können Spannungen in der Zeit integriert werden nach

$$\sigma(X, \bar{t}) = \int_{t_0}^{\bar{t}} \frac{D_{cr}\sigma}{Dt} dt \quad (2.20)$$

Wenn die von Benson (1992) unsaubere Zentrierung („sloppy centering“) genannte Form in einer expliziten Zeitdiskretisierung verwendet wird, können die Spannungen durch folgenden Zusammenhang in der Zeit integriert werden:

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta t \left( \left( \frac{D\sigma}{Dt} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \sigma^n W^{n+\frac{1}{2}} - W^{n+\frac{1}{2}} \sigma^n \right) \quad (2.21)$$

Die Bezeichnung „unsaubere Zentrierung“ rührt daher, daß die Rotationskorrektur eigentlich nur für die erste Hälfte des Zeitschritts mit  $\sigma^n$  erfolgen dürfte, für die zweite Hälfte müßte sie mit  $\sigma^{n+1}$  erfolgen. Dies würde eine iterative Vorgehensweise für die Ermittlung der  $\sigma^{n+1}$  erfordern. Die „unsaubere Zentrierung“ hat sich jedoch als eine gute Näherung erwiesen.

Neben der Jaumannschen Spannungsrate gibt es noch verschiedene andere Formen objektiver Spannungsraten, die oftmals auch in den Bezeichnungen nicht ganz eindeutig sind, siehe z. B. in Lai, Rubin, Krempl (1993), Benson (1992). Die hier dargestellte Form ist jedoch weit verbreitet und wird auch im folgenden verwendet.

## 2.3 Erhaltungsgleichungen

Die Berechnung der betrachteten Vorgänge basiert auf den Erhaltungsgleichungen der Mechanik und Thermodynamik: der Massenerhaltungsgleichung, der Impulserhaltungsgleichung (Bewe-

gungsgleichung) und der Energieerhaltungsgleichung (1. Hauptsatz der Thermodynamik). Mit den Annahmen

- Quellen und Senkenfreiheit hinsichtlich Massenströmen
- Beschränkung auf zwei Kraftarten: Oberflächen- und Feldkräfte
- Ausschluß von "innerem Drall"
- Vernachlässigung der Wärmeleitung
- Stetigkeit aller Gleichungsterme

lauten die Erhaltungsgleichungen in der sogenannten „starken Form“:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.22)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (2.23)$$

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (2.24)$$

$\mathbf{f}$  ist hier eine Volumenkraft pro Masseinheit (z. B. Gravitation, Einheit:  $\text{m/s}^2$ ).

Eine Formulierung der Drehimpulserhaltung findet in der starken Form nicht statt, da für die betrachteten infinitesimal kleinen Partikel die Drehimpulserhaltung durch die Symmetrie des Spannungstensors bereits erfüllt ist. In der schwachen, das heißt für ein Kontrollvolumen formulierten Form der Erhaltungsgleichungen, kann die Drehimpulserhaltung jedoch als zusätzliche Gleichung formuliert werden.

Die Wärmeleitung kann vernachlässigt werden, weil die Wärmemengen, die in den bei Impaktvorgängen betrachteten kurzen Zeiträumen ausgetauscht werden können, sehr klein sind. Die ablaufenden Vorgänge können daher idealisiert als adiabate Zustandsänderung betrachtet werden. Adiabate Zustandsänderungen finden in Systemen statt, die per Definition undurchlässig für Materie und Wärme sind. An ihnen kann jedoch mechanische Arbeit verrichtet werden, oder sie können selbst mechanische Arbeit verrichten.

Da nur adiabate Zustandsänderungen betrachtet werden, liefert der zweite Hauptsatz der Thermodynamik keine zusätzlich zu erfüllende Gleichung. Da außerdem im folgenden keine Materialgleichungen verwendet werden, in denen die Entropie als Zustandsgröße eingeht, muß diese nicht explizit berechnet werden.

Die Energiegleichung dient zunächst zur Berechnung der Änderungsrate der spezifischen inneren Energie aus der Spannungsleistung, die als Produkt aus Spannungstensor und Geschwindigkeitsgradient berechnet wird. Bei Kenntnis einer spezifischen Wärmekapazität  $c$ , die allerdings im allgemeinen von der Temperatur abhängig ist, kann eine Temperaturänderung  $\Delta\theta$  aus der Änderung der inneren Energie berechnet werden gemäß

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{c} \frac{De}{Dt} \quad (2.25)$$

Durch die Erhaltungsgleichungen ist ein System partieller Differentialgleichungen mit den unbekanntem  $v$ ,  $e$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  (bzw. deren unbekanntem Änderungsraten  $Dv/Dt$ ,  $De/Dt$ ,  $D\sigma/Dt$ ,  $D\rho/Dt$ ) als abhängigen Variablen sowie dem Ortsvektor  $x$  sowie der Zeit  $t$  als unabhängigen Variablen gegeben. Im dreidimensionalen Fall ergeben sich hierdurch insgesamt  $3+1+6+1=11$  Unbekannte, bei nur 5 gegebenen Gleichungen (die Impulserhaltung zählt in 3 Raumrichtungen). Bei gegebenen Anfangsbedingungen  $v$ ,  $e$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  zum Zeitpunkt  $t_0$  ist das System in der Zeit noch nicht lösbar, es werden Materialgleichungen benötigt, die im Grundsatz über den "Umweg" der Dehnungen (oder Deformationsraten) Beziehungen zwischen den Raumkoordinaten des verzerrten Materials (oder den Geschwindigkeiten), der inneren Energie und den Komponenten des Spannungs(raten-)tensors herstellen. Durch die Einbeziehung von 6 Gleichungen (für die 6 unabhängigen Komponenten des Spannungstensors, die 3 übrigen sind aufgrund der Symmetrie bekannt) wird das System lösbar.

Im Fall eines idealen Gases (ohne innere Reibung) bleibt nur der Druck als einzige unabhängige Variable des Spannungstensors, die von Dichte und Temperatur (bzw. innerer Energie) abhängt. Hier stehen  $3+1+1+1=6$  Unbekannten die 5 Erhaltungsgleichungen und die Zustandsgleichung gegenüber.

Im Fall eines linear-elastischen Materials werden die 6 unbekanntem Komponenten des Spannungstensors über das Hookesche Gesetz direkt in Beziehung gesetzt zu den 6 unbekanntem Komponenten des Dehnungstensors. Dessen Komponenten wiederum lassen sich durch die Ableitungen der Verschiebungen in die drei Raumrichtungen berechnen, so daß auch hier ein lösbares System entsteht.

Die Materialgesetze werden im folgenden in einer für Hydrocodes charakteristischen Formulierung verwendet, die den Vorteil besitzt, für einen sehr weiten Bereich des Materialverhaltens anwendbar zu sein:

- der Druck wird aus einer Zustandsgleichung (EOS) bestimmt:  $p=p(\rho, e)$
- eine Spannungs(raten)-Dehnraten-Beziehung dient zur zeitlichen Integration der deviatorischen Anteile des Spannungstensors, dabei sind Dehnratenabhängigkeit, Fließgesetze und Versagungskriterien zu berücksichtigen.

## 2.4 Spannungswellenausbreitung und Schock

Da die Modellierung von Spannungswellen elementarer Bestandteil der in dieser Arbeit betrachteten Kategorie von Impaktproblemen ist, sollen an dieser Stelle relevante grundlegende Konzepte vorgestellt werden. Ausführliche Darstellungen finden sich beispielsweise in Meyers (1994), Zukas (1991) oder Zel'dovich & Raizer (1966). Zunächst wird die mathematische Beschreibung eindimensionaler Wellenvorgänge in elastischen und plastischen Medien

erläutert, anschließend wird kurz auf die Bildung von Schockwellen und ihre numerische Behandlung eingegangen.

Angemerkt sei an dieser Stelle, daß die Nomenklatur in der Literatur nicht immer konsistent ist. In dieser Arbeit werden, wie in der Mechanik üblich, Zugspannungen grundsätzlich positiv bezeichnet, wogegen in der Impaktphysik oft Druckspannungen positiv sind (so z. B. in Libersky et al. (1993)). Die Partikelgeschwindigkeit wird oft mit  $u$ , die Geschwindigkeit der Welle oder Schockfront mit  $U$  bezeichnet. Diese Bezeichnungen werden in dieser Arbeit übernommen, wenn von Wellenausbreitungsvorgängen die Rede ist, allerdings wird die Partikelgeschwindigkeit mit  $u_p$  bezeichnet, um eine Verwechslung mit dem Verschiebungsvektor  $u$  auszuschließen. Für die allgemeine Bezeichnung der Geschwindigkeit wird weiterhin auch  $v$  verwendet.

#### 2.4.1 Kontinuierliche Wellen

In einer eindimensionalen Betrachtung (Abbildung 2.2) lassen sich mit  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  und  $v = \partial u / \partial t$  die Massen- und Impulserhaltungsgleichungen wie folgt formulieren (z. B. Zukas (1991)):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.26)$$

Unter der Annahme, daß die Spannung  $\sigma$  eine eindeutige Funktion der Dehnung  $\varepsilon$  ist, läßt sich daraus die eindimensionale Wellengleichung herleiten. Die Wellengeschwindigkeit  $c$  ist darin abhängig von der Dichte  $\rho$  sowie von  $d\sigma/d\varepsilon$ , der Steigung der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve. Letztere ist wiederum abhängig vom Materialverhalten sowie davon, ob ein eindimensionaler Spannungszustand oder ein eindimensionaler Dehnungszustand betrachtet wird.

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \quad (2.27)$$

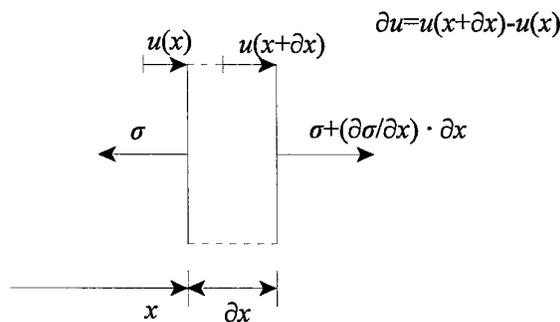


Abbildung 2.2: Eindimensionale Spannungswelle

#### 2.4.2 Spannungswellen in elastischen Medien

Wird für ein homogenes Material ein linear elastisches, isotropes Materialverhalten angenommen, lautet der Zusammenhang zwischen Dehnungstensor  $\varepsilon$  und Spannungstensor  $\sigma$  mit den

Laméschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.28)$$

Werden anstelle der Lamé-Konstanten der Elastizitätsmodul (Youngs Modul  $E$ ) und die Querdehnungszahl (Poisson-Zahl)  $\nu$  verwendet, lautet derselbe Zusammenhang

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right) \quad (2.29)$$

Mit den in der Impaktphysik gebräuchlichen Parametern Kompressionsmodul  $K$  und dem Schermodul  $G$ , der der Lamé-Konstanten  $\mu$  entspricht, ergibt sich

$$\sigma_{ij} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.30)$$

Wenn schließlich, wie in Hydrocodes üblich, der Druck  $p$  direkt aus der Volumenänderung - getrennt von den deviatorischen Anteilen  $S_{ij}$  des Spannungstensors - berechnet werden soll, lautet das isotrope linear elastische Materialgesetz

$$p = K \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right), \quad S_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3} \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \delta_{ij} \right) \quad (2.31)$$

Wird das elastische Materialgesetz in die verallgemeinerte Wellengleichung

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

eingesetzt, lassen sich für verschiedene Wellenarten die Wellengeschwindigkeiten berechnen. Die folgenden Wellenarten sind dabei nach Meyers (1994) in einem elastischen Medium zu unterscheiden:

- Längs- oder Longitudinalwellen. In unendlichen Medien oder Halbräumen werden sie auch „Dilatationswellen“ genannt. In Längswellen ist die Partikelgeschwindigkeit immer parallel zur Fortpflanzungsrichtung der Welle. Die Wellengeschwindigkeit für Längswellen in elastischen Medien ist

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (2.33)$$

Dies entspricht auch der Wellengeschwindigkeit im einachsigen Verzerrungszustand. Im einachsigen Spannungszustand dagegen ist die elastische Wellengeschwindigkeit

$$c_{uniax.\sigma} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{9KG}{\rho(3K+G)}} \quad (2.34)$$

- Scher- oder Transversalwellen. Hier ist die Bewegung der Partikel senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die Dichte bleibt konstant, die Längsdehnungen  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  sind 0. Sie

pflanzen sich langsamer als Longitudinalwellen fort mit der Geschwindigkeit

$$c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.35)$$

- Oberflächenwellen (Rayleigh-Wellen). Sie treten im Bereich der Oberfläche eines Körpers auf, die Partikel bewegen sich auf einer elliptischen Bahn. Die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen ist nochmals geringer als die der Scherwellen, sie läßt sich näherungsweise bestimmen aus (Meyers (1994), S. 40)

$$c_R = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} c_S \quad (2.36)$$

- Grenzschichtwellen (Stoneley-Wellen). Grenzschichtwellen bilden sich an der Kontaktfläche zweier Halbräume mit unterschiedlichen Materialeigenschaften.
- Wellen in geschichteten Medien (Love-Wellen). Diese Wellenform tritt in Medien auf, die aus geschichteten Materialien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften bestehen.
- Biegewellen in Balken, Membranen, Platten und Schalen. Sie beschreiben das Fortschreiten der Biegung für idealisierte eindimensionale und zweidimensionale Körper.

Rayleigh-, Stoneley- und Love-Wellen entstehen, wenn Spannungswellen auf einen Rand treffen. Dieser Rand kann die Berandung eines Körpers oder der Übergang von einem Medium in eines mit anderen Materialeigenschaften sein. Bei der Interaktion mit dem Rand treten Reflexionen und Refraktion auf, wenn sich die akustische Impedanz - das Produkt aus elastischer Wellengeschwindigkeit und Dichte - ändert. Trifft eine Longitudinalwelle nicht senkrecht auf die Grenzfläche, wird eine Longitudinalwelle reflektiert, eine gebrochene (refraktierte) Welle läuft weiter in das neue Medium, zusätzlich entstehen Transversalwellen an der Grenzfläche, die sich in beide Materialien ausbreiten.

Die Berechnung der Spannungsamplituden und Partikelgeschwindigkeiten kann mit Hilfe der Impulserhaltungsgleichung und den Übergangsbedingungen für Spannungen und Geschwindigkeiten an der Grenzfläche erfolgen. Für den einfachen eindimensionalen Fall (senkrecht Auftreffen der Welle auf die Grenzsicht, damit keine Erzeugung von Transversalwellen) ergeben sich die Beziehungen ( $I$ : ankommende Welle im Medium A,  $T$ : weitergeleitete Welle im Medium B,  $R$ : reflektierte Welle im Medium A)

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2\rho_B c_B}{\rho_B c_B + \rho_A c_A}, \quad \frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{\rho_B c_B - \rho_A c_A}{\rho_B c_B + \rho_A c_A} \quad (2.37)$$

$$\frac{u_{pR}}{u_{pI}} = \frac{\rho_A c_A - \rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B}, \quad \frac{u_{pT}}{u_{pI}} = \frac{2\rho_A c_A}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} \quad (2.38)$$

Hieraus lassen sich auch die Verhältnisse für die Grenzfälle „freie Oberfläche“ ( $E_B=0$  bzw.  $c_B=0$ ) und „starres Ende“ ( $E_B=\infty$  bzw.  $c_B=\infty$ ) bestimmen: So wird eine Druckwelle an einem

freien Ende als Zugwelle reflektiert, an einem starren Ende dagegen als Druckwelle. Die Partikelgeschwindigkeit der reflektierten Welle behält bei einem freien Ende die Richtung bei, hat bei einem starren Ende jedoch die entgegengesetzte Richtung gegenüber der Partikelgeschwindigkeit in der ursprünglichen Welle.

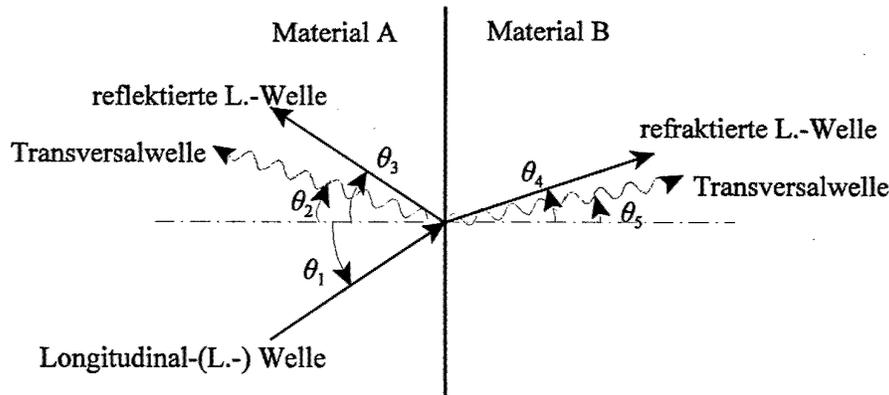


Abbildung 2.3: Reflektierte und refraktierte Wellen, die beim Auftreffen einer Longitudinalwelle mit dem Winkel  $\theta_1$  zur Lotrechten auf eine Grenzschicht zwischen unterschiedlichen Materialien entstehen (nach Meyers, 1994). Die Winkel lassen sich in Abhängigkeit von den Wellengeschwindigkeiten durch die angegebene Gleichung berechnen.

### 2.4.3 Spannungswellen in plastischen Medien

Im folgenden sollen wenige Eigenschaften plastischer Wellen am Beispiel des einachsigen Verzerrungszustandes dargestellt werden. Die folgenden Annahmen werden dabei gemacht:

- Die auftretenden Dehnungen lassen sich in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen:  $\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}$
- Die plastische Verformung ist inkompressibel:  $\varepsilon_{plx} + \varepsilon_{ply} + \varepsilon_{plz} = 0$
- Es gelte eine Fließbedingung nach von Mises: Fließen tritt ein, wenn die zweite Invariante des Spannungstensors  $I_2$  gleich  $Y_0$ , der Fließspannung im einachsigen Spannungszustand, ist.

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung für ein ideal elastisches Material im einachsigen Dehnungszustand lautet

$$\sigma = \left( K + \frac{4G}{3} \right) \varepsilon \quad (2.39)$$

Plastisches Fließen beginnt, wenn das Fließkriterium erfüllt ist. Für den einachsigen Dehnungszustand ist dies der Fall, wenn die Spannung das sog. „Hugoniot elastic limit“ (HEL) erreicht

$$\sigma_{HEL} = \left( \frac{K}{2G} + \frac{2}{3} \right) Y_0 \quad (2.40)$$

$Y_0$  bezeichnet dabei die Fließspannung im einachsigen *Spannungszustand*. Unter der Annahme, daß elastisch-idealplastisches Materialverhalten eintritt, ergibt sich folgender Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang:

$$\sigma = K\varepsilon + \frac{2Y_0}{3} \quad (2.41)$$

Wie oben gesagt, bestimmen die Steigung der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve und die Dichte die Wellengeschwindigkeit. Dementsprechend teilt sich eine Welle, deren Spannungsamplitude das HEL überschreitet, auf in eine elastische Welle mit der Amplitude  $\sigma_{\text{HEL}}$  und der Wellengeschwindigkeit

$$c_{el} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (2.42)$$

sowie eine plastische Welle mit der Amplitude  $\sigma - \sigma_{\text{HEL}}$  und der Wellengeschwindigkeit

$$c_{pl} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.43)$$

#### 2.4.4 Schockwellen

Schockwellen sind Diskontinuitäten in Druck, innerer Energie und Dichte. Sie treten auf, wenn die Wellengeschwindigkeit der Wellenanteile mit hoher (Druck-)Spannung größer ist als die Geschwindigkeit der Anteile mit kleinerer Spannung: dies führt zur Aufsteilung der Welle und zur Bildung einer Schockfront. Da die Wellengeschwindigkeit proportional zur Steigung der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve ist, muß zur Bildung einer Schockfront die Kompressibilität des Materials mit steigendem Druck geringer werden. Im Bereich sehr hoher Drücke ist dies bei allen Materialien (Festkörpern und Fluiden) der Fall. Daneben ist auch ein nahezu einachsiger Dehnungszustand Bedingung für die Bildung einer Schockwelle, da ansonsten die nötigen hohen Drücke nicht aufgebaut werden können.

Entspannungs- oder Zugwellen bilden keine Schockfront, denn die Anteile der Entspannungswelle für die höheren Drücke breiten sich schneller aus als die Anteile der niedrigen (oder negativen) Drücke, so daß die Welle dispergiert.

Aufgrund der konstanten Wellengeschwindigkeit würden in einem ideal elastischen Material ebenfalls keine Schockwellen entstehen: Die Wellen können zwar eine scharfe Wellenfront besitzen, diese ist dann aber durch die Erregung (oder einen Impakt) bedingt, die Welle selbst verändert ihre Form nicht, während sie sich ausbreitet.

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie lassen sich auch für eine fortschreitende Schockwelle aufstellen, in der die in der kontinuierlichen Form auftretenden Gradienten unendlich wären. Die sog. (Rankine-)Hugoniot-Gleichungen lauten für einen einachsigen Dehnungszustand (Index 0 bezeichnet Größen vor, Index 1 hinter der Schockfront)

$$\rho_1(U - u_{p1}) = \rho_0(U - u_{p0}) \quad (2.44)$$

$$\sigma_1 + \rho_1(U - u_{p1})^2 = \sigma_0 + \rho_0(U - u_{p0})^2 \quad (2.45)$$

$$e_1 + \frac{1}{2}(U - u_{p1})^2 = e_0 + \frac{1}{2}(U - u_{p0})^2 \quad (2.46)$$

Verschiedene andere Formen der Hugoniot-Gleichungen sind gebräuchlich, sie lassen sich aber aus der obenstehenden durch ineinander Einsetzen der einzelnen Gleichungen erzeugen. Oft wird in den Gleichungen anstelle der Spannungen  $\sigma$  der Druck  $p$  verwendet: für Fluide sind die beiden Formen äquivalent, für Festkörper allerdings nur, wenn vorausgesetzt wird, daß die deviatorischen Komponenten des Spannungstensors gegenüber dem Druck vernachlässigbar klein sind. Diese Annahme ist jedoch bei hohen Drücken meist erfüllt, wenn die Scherfestigkeit um Größenordnungen kleiner als der Druck ist.

Ähnlich wie die Erhaltungsgleichungen in ihrer differentiellen Form erlauben auch die Hugoniot-Gleichungen alleine nicht das Berechnen der Größen  $U$ ,  $\rho_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $u_{p1}$  oder  $e_1$ , wenn eine von ihnen und die Ausgangswerte  $\rho_0$ ,  $\sigma_0$  etc. gegeben sind: 4 Unbekannten stehen 3 Gleichungen gegenüber. Es muß daher eine weitere Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen den unbekanntenen Größen enthält, hinzugefügt werden, die Materialgleichung. Während hierzu in der Mechanik fester Körper meist Zusammenhänge zwischen Dehnung und Spannung formuliert werden, werden im Bereich der Physik der Schockwellen aus den genannten Gründen (Vernachlässigung der Scherfestigkeit, sehr hohe Drücke, Einfluß der Temperatur) meist Druck-Dichte-Energie-Relationen gesucht. Eine solche Relation wird Zustandsgleichung (EOS) genannt. Druck, Dichte oder innere Energie müssen nicht explizit in der EOS auftauchen, sie können jedoch immer über die Hugoniot-Gleichungen ermittelt werden. So wird der material-spezifische Zusammenhang zwischen Partikelgeschwindigkeit  $u_{p1}$  und der Geschwindigkeit der Schockfront  $U$  oftmals als besondere Form einer EOS, die sog. Shock-EOS, genutzt, insbesondere auch deswegen, weil sich diese beiden Größen vergleichsweise gut messen lassen. Dabei wird zur Darstellung des Zusammenhanges meist ein Polynom 1. oder 2. Grades mit empirisch bestimmten Parametern  $S_1$  bzw.  $S_2$  verwendet (der Parameter  $c_0$  entspricht der Schallgeschwindigkeit):

$$U = c_0 + S_1 u_p (+ S_2 u_p^2) \quad (2.47)$$

Für poröse Materialien oder Fälle, in denen Phasenübergänge stattfinden, sind dagegen andere Formen von Zustandsgleichungen (Mie-Grüneisen, Tillotson, kubische Polynom-EOS etc.) zu verwenden.

### 2.4.5 Numerische Behandlung von Schockwellen

Eine Methode zur numerischen Behandlung von Schockwellen ist wichtiger Bestandteil eines numerischen Verfahrens für Impaktprobleme. Das in der vorliegenden Arbeit verwendete Konzept der künstlichen Viskosität wird in diesem Abschnitt erläutert.

Schockwellen stellen seit der Einführung diskretisierender Methoden eine besondere Herausforderung an die Entwicklung von Berechnungsalgorithmen dar. Ursache hierfür ist die Singularität, die eine Schockwelle im mathematischen Sinne darstellt. Das Differentialgleichungssystem der Hugoniot-Gleichungen ist eigentlich ein Riemann-Problem, dessen Lösung im allgemeinen eine Sprungfunktion beinhaltet (Großmann & Roos, 1994). Die meisten diskretisierenden Berechnungsverfahren beruhen jedoch auf der Annahme, daß die zu approximierenden Funktionen kontinuierlich sind. Werden keine besonderen Maßnahmen z.B. für ein FE Verfahren verwendet, kommt es zu unphysikalischen Oszillationen an der Schockfront.

Zur Lösung dieses Problems können Methoden verwendet werden, die auf einer direkten oder approximativen Lösung des Riemann-Problems beruhen. Häufig werden diese Methoden in einer besonderen Formulierung eines Finite-Differenzen-Verfahrens eingesetzt, das besonders für die Berechnung von Schockwellen konzipiert wurde, dem sogenannten „Godunov-Verfahren“ (z. B. in Toro, 1999). In seiner ursprünglichen Form ist die Lösung der Differentialgleichung eine stückweise (auf den Elementen) konstante Funktion, das Riemann-Problem wird an den Elementgrenzen gelöst. Das Ende der fünfziger Jahre entwickelte Verfahren wurde seither so erweitert, daß auch stückweise lineare und parabolische Lösungsverläufe erzeugt werden können. Insbesondere für Anwendungen in der Gasdynamik/Aerodynamik sind Godunov-Methoden inzwischen eine Standardlösung, wenn Schockwellen eine entscheidende Rolle spielen. Sie finden jedoch auch für Schockwellenausbreitung in Festkörpern Verwendung, etwa in den Programmen PISCES von Physics International und CAVEAT, das am Los Alamos National Laboratory in den USA entwickelt wurde.

Ein Ansatz, der zunächst durch von Neumann & Richtmyer (1950) für die Lösung hydrodynamischer Probleme vorgeschlagen wurde, beruht auf der Einführung zusätzlicher künstlicher Druckterme bei der Lösung der kontinuierlichen Erhaltungsgleichungen. Da diese Druckterme von Geschwindigkeitsdifferenzen abhängig sind und hierdurch das Verhalten eines Fluids im Bereich der Schockwelle in ähnlicher Weise beeinflußt wird wie durch die Einführung der Zähigkeit, spricht man auch von „künstlicher Viskosität“. Die Motivation für die Einführung dieser Druckterme läßt sich leicht nachvollziehen, wenn die Lösung der Hugoniot-Gleichungen für besondere Fälle betrachtet wird.

Für ein ideales Gas gilt die Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (2.48)$$

Hier ist  $\gamma$  der Quotient aus den beiden spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  und  $c_v$ , für ideale Gase ist er gleich dem Isentropen- oder Adiabatenexponenten  $\kappa$ .

Hugoniot zeigte 1889, daß das nach ihm benannte Gleichungssystem für den eindimensionalen Fall explizit nach dem Druck  $p_1$  hinter der Schockfront aufgelöst werden kann:

$$p_1 = p_0 + \frac{\gamma+1}{4} \rho_0 (\Delta u_p)^2 + \rho_0 |\Delta u_p| \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 (\Delta u_p)^2 + c_0^2} \quad (2.49)$$

$\Delta u_p$  ist hier die Differenz der Partikelgeschwindigkeiten vor und hinter der Schockfront  $u_{p0} - u_{p1}$ . Offensichtlich ist die Druckdifferenz  $p_1 - p_0$  von  $\Delta u_p$  durch einen linearen und einen quadratischen Term abhängig. Die Viskosität  $q$  hat daher für starke Schocks ( $\Delta u_p \gg c_0$ ) näherungsweise die Form

$$q = \frac{\gamma+1}{2} \rho (\Delta u_p)^2 \quad (2.50)$$

und für schwache Schocks ( $\Delta u_p \ll c_0$ )

$$q = \rho c |\Delta u_p| \quad , \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (2.51)$$

Eine künstliche Viskosität der Form

$$q = \frac{\gamma+1}{2} \rho (\Delta u_p)^2 + \rho c |\Delta u_p| \quad , \quad q = 0 \quad \forall \Delta u_p \geq 0 \quad (2.52)$$

in einem Schema, das selbst keine Diskontinuität abbilden kann, liefert daher in einem gewissen Abstand von der Schockfront ein vergleichbares Ergebnis wie die direkte Lösung der Gleichung 2.49. Die Schockfront selbst wird dabei über mehrere Diskretisierungseinheiten (Elemente, Partikel) verteilt.  $\Delta u_p$  ist die Geschwindigkeitsdifferenz über eine Zone oder ein Element. Die künstliche Viskosität wird nur verwendet, wenn  $\Delta u_p < 0$ , da eine steile Schockfront generell nur bei Kompression entsteht.

Wenn eine lineare Zustandsgleichung vorliegt, wie etwa für ideal elastisches Material,

$$p = K \left( \frac{V_0}{V_1} - 1 \right) = K \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right) \quad (2.53)$$

können die Hugoniot-Gleichungen ebenfalls explizit gelöst werden:

$$p_1 = p_0 + \rho_0 (\Delta u_p)^2 + \rho_0 (\Delta u_p) \sqrt{\left(\frac{\Delta u_p}{2}\right)^2 + c_0^2} \quad (2.54)$$

Eine Viskosität für starke Schocks lautet entsprechend

$$q = \rho_0 (\Delta u_p)^2 \quad (2.55)$$

und für schwache Schocks

$$q = \rho_0 c_0 \Delta u_p \quad (2.56)$$

Es liegt daher nahe, eine künstliche Viskosität in einer für Gase und Festkörper gleichermaßen geeigneten Form darzustellen (Wilkins (1980)):

$$q = c_Q^2 \rho (\Delta u_p)^2 + c_L c \rho |\Delta u_p| \quad (2.57)$$

Diese künstliche Viskosität wird als zusätzlicher Druck in die Erhaltungsgleichungen für Impuls und Energie eingeführt. Von Neumann und Richtmyer (1950) hatten ursprünglich nur den quadratischen Anteil für die Auflösung von Schocks verwendet. Die Koeffizienten  $c_Q$  und  $c_L$  (häufig auch mit  $c_0$  und  $c_L$  bezeichnet) könnten im Prinzip für ideale Gase oder eine lineare Zustandsgleichung durch direkten Vergleich mit 2.49 bzw. 2.54 bzw. den Näherungen für starke und schwache Schocks bestimmt werden. Für ein ideales Gas mit  $\gamma=5/3$  würde man demnach die Konstanten mit  $c_Q=1.3$  und  $c_L=1.0$  wählen. Wilkins (1980) betont, daß die theoretischen Werte nicht genug Dämpfung besonders für die Oszillationen hinter der Schockfront bieten und schlägt daher Werte von  $c_Q=2.0$  und  $c_L=0.8$  vor, die für einen großen Druckbereich und verschiedene Zustandsgleichungen geeignet sein sollen. Benson (1992) nennt dagegen  $c_Q=1.5$  und  $c_L=0.06$  als häufig verwendete Werte, der niedrigere Wert für  $c_L$  soll dazu führen, daß eine Schockwelle nicht über mehr Zellen als nötig verschmiert wird.

Eine andere Form für die künstliche Viskosität läßt sich mit  $\Delta u_p = \Delta x \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$  schreiben:

$$q = \rho (c_Q \Delta x)^2 \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \right)^2 + c_L c \rho \Delta x \left| \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \right| \quad (2.58)$$

oder, wenn als Näherung für eine Zelle bzw. ein Element  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta x}$  eingesetzt wird,

$$q = \rho (c_Q \Delta \dot{x})^2 + c_L c \rho |\Delta \dot{x}| \quad (2.59)$$

Eine Erweiterung für mehrdimensionale Berechnungen kann auf verschiedene Art und Weise geschehen. Die einfachste Möglichkeit ist die Verwendung einer isotropen Viskosität, in der anstelle der Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta u_p$  die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes, multipliziert mit einer für das Element/die Zelle charakteristischen Länge (hier für ein zweidimensionales Element die Quadratwurzel der Elementfläche  $A$ ) eingesetzt wird:

$$\Delta u_p \approx \sqrt{A} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.60)$$

Diese Näherung hat ihre Grenzen, sie führt z. B. in axialsymmetrischen Berechnungen zu einer Überhitzung, weil die viskosen Terme sich auch auf die Spannungen in Umfangsrichtung auswirken, obwohl in dieser Richtung keine Schocks vorkommen.

Aufgrund der einfachen Formulierung ist diese Form der künstlichen Viskosität dennoch weit verbreitet, sie wird auch für die FE-Methode in der vorliegenden Arbeit verwendet. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung einer tensoriellen (nicht isotropen) Viskosität, die die Ausbreitungsrichtung der Schockwelle berücksichtigt. Verschiedene FD- und FE-Programme verwenden diese Form der Viskosität, Libersky und Randles (1999) haben eine tensorielle Viskosität auch in der SPH-Methode realisiert.

Die künstliche Viskosität wirkt sich auch auf die Berechnung der Zeitschrittweite aus, weil die Druckterme zu zusätzlichen Beschleunigungen und damit auch höheren Geschwindigkeiten führen. Die folgenden Betrachtungen gelten für die hier verwendete isotrope Viskosität. Nach Benson (1992) lautet ein mögliches zusätzliches Zeitschritt-Kriterium

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c_T + \sqrt{c_T^2 + c^2}}, \quad \text{wobei } c_T = \begin{cases} c_L c_H + c_Q |\Delta u_p| & \Delta u_p < 0 \\ c_L c_H & \Delta u_p \geq 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

Die Hugoniot-Geschwindigkeit  $c_H$  ist dabei die Schallgeschwindigkeit auf der Basis des elastischen Schermoduls  $G$  und der Beiträge aus der Zustandsgleichung

$$c_H = \sqrt{\frac{4G}{3\rho_0} + \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_E} + \frac{pV^2}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_p \quad (2.62)$$

Für die Wahl der Länge  $\Delta x$  gibt es verschiedene Möglichkeiten, etwa die Quadratwurzel der Elementfläche, die kürzeste Elementdiagonale etc.

Daneben gibt es auch andere Möglichkeiten, in AUTODYN (Century Dynamics, 1999) werden zum Beispiel anstelle von Gleichung 61 die folgenden beiden zusätzlichen Bedingungen verwendet:

$$\Delta t \leq \frac{1}{4c_Q^2 |\nabla \cdot \mathbf{v}|} \quad \text{und} \quad \Delta t \leq \frac{d}{2c_L c_H} \quad (2.63)$$

## 2.5 Materialgleichungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden bereits verschiedene Materialgleichungen für ideale Gase sowie isotropes ideal-elastisches und elastisch-idealplastisches Materialverhalten genannt. In diesem Abschnitt sollen die in der vorliegenden Arbeit verwendeten und im erstellten Simulationsprogramm implementierten Materialgesetze zusammengestellt werden. Insgesamt ist die Entwicklung geeigneter Materialgesetze für Hydrocodes noch nicht abgeschlossen. Während für duktile Materialien Beschreibungsweisen entwickelt wurden, die inzwischen relativ weite Verbreitung gefunden haben, ist die Beschreibung des Verhaltens spröder Materialien unter hochdynamischen Lasten, insbesondere auch von Beton (Riedel, 1998; Ruppert, 1999), noch Gegenstand der Forschung.

Hiermaier (1996) hat die auch in dieser Arbeit verwendeten Materialgesetze beschrieben und im von ihm entwickelten SPH-Code SOPHIA implementiert.

Die Materialformulierung kann in drei Schritte unterteilt werden: Die Zustandsgleichung (EOS), das Festigkeitsmodell und das Versagensmodell.

### 2.5.1 Zustandsgleichungen

Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas lautet ( $\gamma$  ist gleich dem Isotropenexponenten)

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (2.64)$$

Unmittelbar vom Hookschen Gesetz abzuleiten ist die lineare Zustandsgleichung, die eine Abhängigkeit des Druckes nur von der Dichte beschreibt.

$$p = K \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (2.65)$$

Im folgenden wird der Kompressionsparameter  $\mu$  zur Beschreibung der Dichteabhängigkeit benutzt.

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \quad (2.66)$$

Der Kompressionsmodul  $K$  (engl. „bulk modulus“) kann auch durch die bereits genannten Laméschen Konstanten  $\lambda_L$  und  $\mu_L$  oder den Elastizitätsmodul  $E$  und die Querdehnungszahl  $\nu$  ausgedrückt werden:

$$K = \lambda_L + \frac{2}{3}\mu_L = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.67)$$

Zustandsgleichungen vom Mie-Grüneisen-Typ haben die Form

$$p = p_0 + p_H + p_I = p_0 + p_H + \frac{\Gamma(v_s)}{v_s}(e - e_0) \quad (2.68)$$

Hier ist  $p_0$  der Ausgangs- bzw. Umgebungsdruck,  $p_H$  der Hugoniot- oder Schockwellendruck und  $p_I$  die Druckänderung aufgrund der isentropen Zustandsänderung, die nach dem Grüneisen-Ansatz im letzten Term der Gleichung berechnet werden kann.  $\Gamma$  ist der Grüneisen-Parameter, der vom spezifischen Volumen  $v_s = 1/\rho$  abhängig ist.

Einer der möglichen Ansätze für die Berechnung des Hugoniot-Druckes ist die Polynom-Zustandsgleichung mit Parametern  $K_1, K_2, K_3$  für Kompression und  $T_1$  und  $T_2$  für Ausdehnung

$$p_H = \begin{cases} K_1\mu + K_2\mu^2 + K_3\mu^3 & \mu > 0 \\ T_1\mu + T_2\mu & \mu < 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Einen weiteren Ansatz bietet die bereits erläuterte Schock-Zustandsgleichung, die eine lineare Abhängigkeit der Schockwellengeschwindigkeit  $U$  von der Partikelgeschwindigkeit  $u_p$  mit dem Parameter  $s$  annimmt

$$U = c_0 + s u_p \quad (2.70)$$

und, eingesetzt in die Hugoniot-Gleichungen, eine Druck-Dichte-Abhängigkeit nach

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu)}{(1 - (s-1)\mu)^2} \quad (2.71)$$

ergibt. Bei der Schock-Zustandsgleichung ist zu beachten, daß sie nur in einem Bereich

$$\mu < \frac{1}{s-1} \quad (2.72)$$

sinnvolle Werte liefert, dies kann unter Umständen zu numerischen Problemen führen: liegt  $\mu$  im Bereich dieses Grenzwertes, kann der Druck quasi unendlich groß werden, für  $\mu$  über dem Grenzwert nimmt der Druck wieder ab. Allerdings sind bereits deutlich unter dem Grenzwert die Annahmen, die der Schock-Zustandsgleichung zugrunde liegen, nicht mehr erfüllt. AUTODYN (Century Dynamics, 1999) bietet eine bilineare Form der Schock-EOS an, daneben sind auch Formen gebräuchlich, in die die Partikelgeschwindigkeit zusätzlich in zweiter und dritter Potenz eingeht. Für Metalle liefert der lineare Ansatz jedoch ausreichende Ergebnisse, solange nur plastische Verformungen auftreten.

Daneben sind in Hydrocodes noch weitere Zustandsgleichungen gebräuchlich, für poröse Materialien etwa die sog.  $p$ - $\alpha$  Zustandsgleichung, oder, wenn Phasenübergänge beschrieben werden sollen, die Tillotson-Zustandsgleichung (Hiermaier, 1996).

### 2.5.2 Zeitliche Integration der deviatorischen Spannungen, Festigkeitsmodelle

Die in Hydrocodes verwendete explizite Zeitintegration (siehe Kapitel 4) führt dazu, daß die Beschreibung der Änderung des Spannungsdeviators inkrementell, vom Zeitpunkt  $t_n$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  in Zeitschritten der Länge  $\Delta t_{n+1/2}$  erfolgt. Konkret wird in dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Programm der folgende Algorithmus angewandt:

1. Mit Hilfe des Deformationsratentensors werden elastische Spannungsänderungsraten berechnet:

$$\left(\frac{DS}{Dt}\right)_{n+1/2} = 2G \left( D_{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{tr}(D_{n+1/2}) I \right) \quad (2.73)$$

2. Die objektiven Spannungsänderungsraten sind dann

$$\left(\frac{D_{cr}S}{Dt}\right)_{n+1/2} = \left(\frac{DS}{Dt}\right)_{n+1/2} - W_{n+1/2} S_n + S_n W_{n+1/2} \quad (2.74)$$

3. Die Integration der Spannungen erfolgt zunächst durch

$$S_{n+1} = S_n + \Delta t_{n+1/2} \left(\frac{D_{cr}S}{Dt}\right)_{n+1/2} \quad (2.75)$$

4. Die von der Deformationsrate und anderen Parametern abhängige Fließfläche wird aktualisiert, wenn keine „statische Fließspannung“  $\sigma_y$ =konstant verwendet wird. Zwei verschiedene Festigkeitsmodelle werden hierzu eingesetzt:

Die Fließspannung nach Johnson-Cook (Johnson & Cook, 1983) wird berechnet zu

$$\sigma_y = (A + B\varepsilon_p^n) \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{eff,pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] (1 - T^{*m}) \quad (2.76)$$

Im Modell von Johnson & Cook ist  $A$  die Fließspannung bei einer sehr kleinen Dehnrates; sie ist aus Versuchen zu ermitteln (bei „quasistatischen“ Versuchen häufig etwa 0.0001/s-0.001/s). Mit den Parametern  $B$  und  $n$  wird die Dehnverfestigung in Abhängigkeit von der plastischen Dehnung  $\varepsilon_{eff,pl}$  (s.u.) beschrieben. Der Faktor  $C$  beeinflusst die Abhängigkeit von der plastischen Dehnrates  $\dot{\varepsilon}_{eff,pl}$ , die auf die Einheitsdehnrates  $\dot{\varepsilon}_0 = 1/s$  bezogen wird.  $T^*$  ist der Quotient aus den Differenzen zwischen aktueller Temperatur und Raumtemperatur und zwischen Schmelztemperatur und Raumtemperatur. Der Temperatureinfluss wird über den Exponenten  $m$  beschrieben.

Daneben wurde in dem Programm die von Dehnung, Dehnrates und Druck über einen isotropen Damageparameter  $D$  abhängige Elastizitätsgrenze des Festigkeitsmodells von Holmquist, Johnson & Cook (1993) zur Beschreibung des Verhaltens spröder Materialien implementiert (vgl. Hiermaier, 1996).

5. Es wird überprüft, ob die Fließbedingung erfüllt ist:

$$f(S_{n+1}, \sigma_y) > 0 \quad (2.77)$$

Hier wird die von-Mises-Fließbedingung benutzt, die besagt, daß Fließen eintritt, wenn die zweite Invariante des Spannungsdeviators  $J_2$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (2.78)$$

größer als ein Drittel des Quadrates der Fließspannung wird.

$$J_2 - \frac{1}{3} \sigma_y^2 > 0 \quad (2.79)$$

Die plastischen Dehnungsinkremente  $d\varepsilon_{eff,pl}$  werden mit Hilfe der sog. Vergleichsspannung  $\sigma_v$  berechnet ( $G$  ist hier der Schubmodul)

$$d\varepsilon_{eff,pl} = \frac{\sigma_v - \sigma_y}{3G}, \quad \sigma_v = \sqrt{3J_2} \quad (2.80)$$

Die Summe der plastischen Dehnungsinkremente ergibt die oben verwendete plastische Dehnung  $\varepsilon_{eff,pl}$ .

6. Falls die Fließbedingung erfüllt ist, wird ein Algorithmus eingesetzt, der einen korrigierten, auf der Fließfläche liegenden Spannungszustand berechnet. Hierzu werden die Komponenten des Spannungsdeviators durch Multiplikation mit der Wurzel aus dem Quotienten aus dem Quadrat der Fließspannung und dem dreifachen der zweiten Invariante  $J_2$  reduziert, so daß der neue Spannungszustand wieder auf der Fließfläche liegt (sog. „radial return“ - Algorithmus).

$$S_{ij,red} = S_{ij} \sqrt{\left(\frac{\sigma_y^2}{3J_2}\right)} \quad (2.81)$$

Daneben wird überprüft, ob hydrostatische Zugspannungen (negativer Druck  $-p$ ) vorliegen, die der grundlegenden Annahme

$$-p < \frac{\sigma_y}{3} \quad (2.82)$$

des von-Mises-Modells widersprechen. Wenn dem so ist, werden diese Zugspannungen auf den Grenzwert  $\sigma_y/3$  reduziert.

### 2.5.3 Versagensmodelle

Im erstellten Programm wurde nur ein einfaches isotropes Versagensmodell verwendet. Für versagtes Material werden dabei alle Komponenten des Spannungsdeviators zu Null gesetzt. Falls hydrostatische Zugspannungen auftreten würden ( $p < 0$ ), wird darüber hinaus auch der Druck zu Null gesetzt. Als Kriterien für dieses isotrope Versagen werden verschiedene Kriterien verwendet:

1. Das als „spall“ bezeichnete hydrodynamische Zugspannungsversagen,

$$p < p_{min} \quad (2.83)$$

wobei  $p_{min}$  eine vom Benutzer festzulegende Materialeigenschaft ist.

2. Ein „bulk“ genanntes Versagenskriterium, das eintritt, wenn die plastische Dehnung  $\epsilon_{eff,pl}$  einen vorgegebenen Maximalwert überschreitet.

$$\epsilon_{eff,pl} > \epsilon_{bulk} \quad (2.84)$$

3. Wenn, wie im Falle des oben genannten Modells von Holmquist, Johnson & Cook (1993), im Festigkeitsmodell der Wert einer Damagevariablen  $D$  berechnet wird, kann die vollständige Zerstörung des Materials ( $D=1$ ) als weiteres Versagenskriterium verwendet werden.

In Hydrocodes werden darüber hinaus andere Versagensmodelle und -kriterien verwendet und entwickelt, etwa richtungsabhängige Versagensmodelle, in denen nur Spannungen in bestimmte Richtungen reduziert werden, und Versagenskriterien auf der Basis von Hauptspannungen oder Hauptdehnungen. Insbesondere sprödes Materialverhalten läßt sich ohne derartige Ansätze kaum beschreiben. In der vorliegenden Arbeit sollen jedoch Diskretisierungsverfahren und ihre Kopplung untersucht werden, zu diesem Zweck wurde die Materialbeschreibung bewußt einfach gehalten und auf weitergehende Versagensmodelle wurde verzichtet.

### 3. GRUNDLAGEN AUS DEN NUMERISCHEN SIMULATIONSVERFAHREN

Nachdem im vorangegangenen Kapitel einige mechanische Grundlagen, die für Impaktberechnungen wesentlich sind, dargestellt wurden, soll dieses Kapitel einen Überblick über die numerischen Grundlagen der für Impaktvorgänge verwendeten Simulationsverfahren geben. Ziel ist dabei insbesondere, die generellen Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den möglichen Diskretisierungsansätzen aufzuzeigen und eine Einordnung der netzfreien Verfahren in den Zusammenhang der numerischen Verfahren für die gegebene kontinuumsmechanische Problemstellung zu ermöglichen. Auf dieser Basis können in den nachfolgenden Kapiteln die in dieser Arbeit verwendeten Diskretisierungsverfahren eingeführt und Verfahren zur Kopplung von netzfreier und Netz-Methode entwickelt und untersucht werden.

Grundlegendes Merkmal der betrachteten Simulationsverfahren für Impaktberechnungen ist die Lösung des Systems der Erhaltungsgleichungen. Im ersten Abschnitt wird dieses Gleichungssystem charakterisiert und ein Überblick über mögliche Lösungsverfahren gegeben. Im zweiten Abschnitt erfolgt dann eine Erläuterung der Unterschiede zwischen der Formulierung der Gleichungen in der starken und der schwachen Form. Im Anschluß erfolgt eine Darstellung zweier Optionen zur Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen, der Finite-Differenzen-Verfahren und der Ansatzverfahren, in ihren Grundzügen. Beide sind grundsätzlich sowohl zur Diskretisierung im Raum als auch zur Diskretisierung in der Zeit einsetzbar, zur Verdeutlichung werden beide anhand der räumlichen Diskretisierung der Impulserhaltungsgleichung diskutiert. Die abschließend betrachteten netzfreien Verfahren lassen sich den Ansatzverfahren zuordnen.

#### 3.1 Mathematische Formulierung der Problemstellung

Im mathematischen Sinn stellen die Erhaltungsgleichungen

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad \frac{De}{Dt} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f} \mathbf{v} \quad (3.1)$$

ein kombiniertes Anfangs-/Randwertproblem dar: die Lösungen sind sowohl abhängig vom Anfangszustand, der durch  $\rho(t=0)$ ,  $\mathbf{v}(t=0)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(t=0)$  und  $e(t=0)$  im gesamten betrachteten Gebiet  $\Omega$  gegeben sein muß, als auch von vorgegebenen Randbedingungen für die Größen, deren räumliche Ableitung in den Gleichungen auftaucht:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\Gamma$  auf dem Teil  $\Gamma_v$  des Gebietsrandes, auf dem Geschwindigkeiten vorgegeben sind, und  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_\Gamma$  auf dem Teil  $\Gamma_\tau$ , auf dem die Traktionen

$\boldsymbol{\tau}$  (Spannungsvektoren auf dem Gebietsrand) vorgegeben sind, wobei sich der gesamte Rand aus beiden Rändern zusammensetzt:  $\Gamma_v \cup \Gamma_\tau = \Gamma$  und  $\Gamma_v \cap \Gamma_\tau = \emptyset$ .

Zentrale Bedeutung für die Lösung des Gleichungssystems besitzt die Impulserhaltungsgleichung. Sie gibt die Beschleunigungen in Abhängigkeit vom herrschenden Spannungsfeld an. Viele numerische Verfahren, so z. B. viele FE-Verfahren für Strukturanalysen, beruhen auf der Lösung der Impulserhaltungsgleichung in Kombination mit einem Verfahren, Verzerrungen oder Deformationsraten zu berechnen, aus denen wiederum über ein Materialgesetz der Spannungszustand zu ermitteln ist. Die Massenerhaltungsgleichung wird bei Lagrange-Verfahren generell oft nicht explizit gelöst, vielmehr wird die Massenerhaltung dadurch sichergestellt, daß die diskreten, Knoten oder Partikeln zugeordneten Massen immer konstant bleiben. Die Massenerhaltungsgleichung kann dann zur Berechnung der Dichte verwendet werden, hierzu stehen aber auch andere Möglichkeiten zur Verfügung, bei der Verwendung von Elementen zum Beispiel der Quotient aus den zuzuordnenden Knotenmassen und dem Elementvolumen. Die Energieerhaltungsgleichung dient bei Fragestellungen, bei denen der Druck nicht von der inneren Energie, sondern nur von der Dichte abhängt, also beispielsweise bei ideal-elastischem Materialverhalten, nur zur Kontrolle der Gesamtenergieerhaltung. In den übrigen Fällen geht die aus der Energieerhaltungsgleichung berechnete innere Energie in die Zustandsgleichung zur Berechnung des Druckes ein. Der in der Energieerhaltungsgleichung benötigte Geschwindigkeitsgradient wird allerdings für die kinematische Beschreibung ohnehin berechnet, so daß für die Energieerhaltungsgleichung keine eigene diskrete Form eingeführt werden muß. Beim SPH-Verfahren (Kapitel 6) allerdings wird die Energieerhaltungsgleichung gesondert diskretisiert, um eine spezifische Form der künstlichen Viskosität berücksichtigen zu können.

Am linear-elastischen Fall für kleine Dichteänderung läßt sich zeigen, daß die allgemeine Form der Impulserhaltungsgleichung wie die Hugoniot-Form einen hyperbolischen Charakter (bzw. den Charakter einer Wellengleichung) aufweist. Wird das elastische Materialgesetz mit dem Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  (Tensor 4. Stufe)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

formuliert, die Dehnungen aus

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \right) \quad (3.3)$$

berechnet und die Impulserhaltungsgleichung mit den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  formuliert, ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \nabla \left[ \mathbf{C} : \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \right) \right] = 0 \quad (3.4)$$

Zur Charakterisierung wird diese Gleichung mit einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung 2. Grades verglichen:

$$A(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad (3.5)$$

Für die Bestimmung, ob es sich um eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Gleichung handelt, wird für das gegeben Problem der Ausdruck  $B^2-AC$  ausgewertet. Dabei gilt (vgl. Bathe, 1986, S.103):

$$B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ > 0 & \text{hyperbolisch} \end{cases} \quad (3.6)$$

Da im vorliegenden Fall (Glg. 3.4)  $A < 0$  (Minuszeichen vor dem Term, in dem zweimal nach den Raumkoordinaten abgeleitet wird),  $B=0$  sowie  $C=1$  sind, läßt sich wegen  $B^2-AC > 0$  der hyperbolische Charakter der partiellen Differentialgleichung bestimmen.

Dieser hyperbolische Charakter der Gleichung in Verbindung mit dem Auftreten von Unstetigkeiten in der Lösung in Form von Schockwellen erfordert besondere Verfahren zur Lösung. Eine Möglichkeit ist die Verwendung einer expliziten Zeitintegration in Verbindung mit einem die Zeitschrittlänge begrenzenden Stabilitätskriterium (CFL-Kriterium, siehe Kapitel 4) und der bereits in Kapitel 2 dargestellten künstlichen Viskosität. Ein solches Verfahren, das auch in dieser Arbeit eingesetzt wird, beruht auf der getrennten Behandlung der zeitlichen und räumlichen Ableitung in der Impulserhaltungsgleichung in einzelnen Zeitschritten. Der grundsätzliche Ablauf eines solchen „Hydrocodes“ oder „Wellenausbreitungscodes“ ist folgender:

- Berechne die Zeitschrittgröße  $\Delta t$
- Berechne die Beschleunigungen  $(\partial v / \partial t)$  aus den räumlichen Ableitungen  $(\nabla \cdot \sigma)$
- Integriere die Geschwindigkeiten mit den Beschleunigungen über die Zeit
- Integriere die Koordinaten  $x$  mit den Geschwindigkeiten
- Berechne den neuen Spannungszustand für die neue Momentankonfiguration aus dem alten Zustand mit Hilfe der aus den Deformationsraten (bzw. aus  $\nabla v$ ) ermittelten Spannungsraten und dem Materialmodell
- Berechne die Änderung der inneren Energie
- Beginne den nächsten Zeitschritt.

Da bei der Lösung des Gesamtproblems die räumliche Ableitung zweifach vorkommt ( $\nabla \cdot \sigma$  und  $\nabla v$ ) und diese durch den Zusammenhang zwischen Deformation und Spannungen über die Materialgleichung verknüpft sind, wird im Prinzip eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst; sie ist in einem Hydrocode nur als System von Differentialgleichungen erster Ordnung formuliert.

Danben wurden noch eine Reihe anderer Verfahren für die numerische Lösung des hyperbolischen Differentialgleichungssystems entwickelt, etwa die Schemata von Lax-Friedrich,

Godunov, Enquist-Osher oder Lax-Wendroff, die besondere Formen von Finite-Differenzen-Verfahren darstellen (vgl. Großmann & Roos, 1994, S. 385ff).

### 3.2 Starke und schwache Formen der Differentialgleichungen

Generell ist es möglich, diskrete numerische Berechnungsverfahren unmittelbar auf der im vorhergehenden Abschnitt dargestellten, sogenannten „starken“ Form der Erhaltungsgleichungen, aufzubauen, indem die Gleichungen an jedem Berechnungspunkt (näherungsweise) zu erfüllen sind. Es ist jedoch auch möglich, eine „schwache“, über ein Kontrollvolumen integrierte Form der Differentialgleichungen zu entwickeln, und zu fordern, daß diese Integrale Form durch das Näherungsverfahren approximiert wird. Die in dieser Arbeit gekoppelten Verfahren, SPH und FE, unterscheiden sich in dieser Hinsicht. Daher sind Partikel nicht so einfach an Elemente zu koppeln, wie etwa verschiedene Elementtypen untereinander verbunden werden können, der Unterschied zwischen starker und schwacher Form ist deswegen von entscheidender Bedeutung.

Die schwache Form der Impulserhaltungsgleichung lautet (vgl. z. B. Benson, 1992)

$$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{a} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{x} \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{x} \, d\Gamma_r = 0 \quad (3.7)$$

Hier ist  $\mathbf{a}$  der Vektor der Beschleunigungen  $d\mathbf{v}/dt$ . Die Testfunktionen  $\delta \mathbf{x}$  können dabei beliebige Funktionen sein, die stetig im gesamten Gebiet  $\Omega$  und 0 auf dem Rand  $\Gamma_v$  („geometrisch verträglich“) sind. Werden die Testfunktionen  $\delta \mathbf{x}$  als „virtuelle Verrückungen“ interpretiert, spricht man von der schwachen Form der Impulserhaltungsgleichung auch als „Prinzip der virtuellen Arbeit“. Die Variation der virtuellen Arbeit  $\delta \Pi$  muß zur Erfüllung des (dynamischen) Gleichgewichtes 0 sein. Die schwache Form der Impulserhaltungsgleichung kann mittels Divergenztheorem

$$\int_{\Gamma_r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{x} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{x}) \, d\Omega \quad (3.8)$$

und Produktregel

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{x} + (\nabla \delta \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.9)$$

so umgeformt werden, daß alle inneren Spannungen in einem Term zusammenfallen:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} [(\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{x}] \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{x} \, d\Gamma_r = 0 \quad (3.10)$$

Entscheidend ist, daß die Lösungen der schwachen Form und der starken Form identisch sind (siehe z. B. Hughes, 1987, S. 4ff). Wenn eine Lösung für die starke Form gefunden wurde, ist sie auch Lösung der schwachen Form und umgekehrt. Unterschiede treten allerdings bei der Diskretisierung auf.

### 3.3 Diskretisierungsansätze

Nur in den seltensten Fällen ist es möglich, Randwertaufgaben exakt zu lösen. Diskretisierungsverfahren dienen daher dazu, das gegebene Differentialgleichungsproblem auf die Lösung eines „endlichdimensionalen“, aus einer begrenzten Zahl von Unbekannten bestehenden Problems zurückzuführen, im allgemeinen auf ein System von linearen Gleichungen.

In den folgenden Abschnitten werden die für Probleme der Kontinuumsmechanik seit langem intensiv erforschten Verfahren der Finiten Differenzen und Finiten Elemente und die neueren „netzfreien“ Methoden in ihren Grundzügen dargestellt.

#### 3.3.1 Finite Differenzen

Differenzenverfahren gehen im allgemeinen von der starken Form der Differentialgleichungen aus. Beim Differenzenverfahren wird das kontinuierliche Gebiet  $\Omega$  durch eine diskrete Menge, die Menge von Gitterpunkten, abgebildet. Die in der Differentialgleichung vorhandenen Ableitungen werden durch an den Gitterpunkten zu ermittelnde Differenzen ersetzt. Zusätzlich müssen noch diskrete Formulierungen für die Randbedingungen eingeführt werden.

Die grundlegenden Formeln, die hier der einfachen Darstellung wegen für regelmäßige Gitter dargestellt werden, lassen sich aus der Taylorreihe für eine unbekannte Funktion  $u$  ableiten.

$$u(x \pm h) = u(x) \pm h \frac{du(x)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} \pm \frac{h^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4u}{dx^4} \pm \dots \pm h^n R_n \quad (3.11)$$

Hierbei ist das Restglied  $R_n$  zu bestimmen durch

$$R_n = h^{-n} \int_x^{x \pm h} [d^{n-1}u(\xi) - d^{n-1}u(x)] \frac{(x \pm h - \xi)^{n-2}}{(n-2)!} d\xi \quad (3.12)$$

Aus der Formel von Taylor abzuleitende Approximationen für die erste Ableitung sind die Vorwärtsdifferenz  $D^+$ , die Rückwärtsdifferenz  $D^-$  und die symmetrische oder zentrale Differenz  $D^0$ , daneben für zweite Ableitungen die zweite Differenz  $D^+D^-$ .

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &\approx (D^+u)(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ \frac{du}{dx} &\approx (D^-u)(x) := \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \\ \frac{du}{dx} &\approx (D^0u)(x) := \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \\ \frac{d^2u}{dx^2} &\approx (D^+D^-u)(x) := \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Zentrale Begriffe für die Beurteilung eines Differenzenverfahrens sind die Konvergenz, Konsistenz und Stabilität. Ein Verfahren heißt konvergent von der Ordnung  $k$  ( $k > 0$ ), wenn gilt

$$\max_i |u(x_i) - u_i| \leq Ch^k \quad (3.14)$$

Die maximale Abweichung der an den Gitterpunkten berechneten Werte  $u_i$  zum Wert der exakten Lösung  $u(x_i)$  muß also proportional der Gitterweite  $h$  zur Potenz  $k$  sein. Die Konvergenz sichert, daß der Fehler bei kleineren Abständen der Gitterpunkte ebenfalls kleiner wird, und zwar umso schneller, je höher die Ordnung  $k$  ist.

Die Konsistenz wird von Strikwerda (1989) wie folgt definiert: Ein Differenzenschema  $L_h u = f$  heißt konsistent von der Ordnung  $k$  mit der Differentialgleichung  $Lu = f$  ( $L$  ist hier der Differentialoperator,  $L_h$  der entsprechende Differenzenoperator), falls für jede ausreichend glatte Funktion  $v$  gilt:

$$\max |Lv - L_h v| \leq Ch^k \quad (3.15)$$

Die Konsistenz stellt lediglich sicher, daß das Differenzenschema den Differentialoperator gut approximiert. Für Konvergenz ist aber die Konsistenz allein noch nicht ausreichend. Nach dem Äquivalenztheorem von Lax-Richtmyer ist ein Verfahren konvergent, wenn es sowohl konsistent als auch stabil ist. Stabilität wiederum ist gegeben, wenn aus der Gleichung ( $\gamma_h$  sind hier die Randpunkte des Gitters,  $w_h$  sind auf den Gitterpunkten berechnete Funktionswerte)

$$L_h w_h = f_h, \quad w_h|_{\gamma_h} = 0 \quad (3.16)$$

auf die folgende Ungleichung geschlossen werden kann:

$$\max |w_h| \leq C \max |f_h| \quad (3.17)$$

Die Stabilität ermöglicht damit, vom sogenannten „Defekt“  $L_h u - L_h u_h$ , dem Fehler der Diskretisierung des Differentialoperators, auf das Verhalten von  $u - u_h$ , dem Fehler der Lösung der Differentialgleichung, zu schließen. Sie kann zum Beispiel mit der formalen Fourier-Stabilitätstechnik nach von Neumann (siehe z. B. Großmann & Roos (1994), S. 304, oder Balsara, 1995) untersucht werden.

Zur Konstruktion von Differenzenverfahren für mehrdimensionale Probleme gibt es neben der direkten Verwendung der Differenzen  $D^+$ ,  $D^-$  etc. auf einem regelmäßigen Gitter eine Vielzahl anderer Möglichkeiten. Wegweisend für viele Hydrocodes war die Entwicklung der Integral-Differenzen-Methode (Noh, 1964), die verwandt mit der sog. Box- bzw. Integralbilanzmethode sowie der Finite-Volumen-Methode ist. Die Integral-Differenzen-Methode wurde zunächst für zweidimensionale Anwendungen entwickelt und basiert auf dem Greenschen Satz (vgl. Benson, 1992)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} u dy, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = -\oint_{\Gamma} u dx \quad (3.18)$$

der auch zur Berechnung der Fläche von  $\Omega$  verwendet werden kann.

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx dy = \oint_{\Gamma} x dy = -\oint_{\Gamma} y dx \quad (3.19)$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung, ( $(\partial u / \partial x)_m$  bezeichnet den Mittelwert der Ableitung von  $u$  nach  $x$  im Gebiet  $\Omega$ ) lautet

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \quad (3.20)$$

Werden der Greensche Satz und die Gleichung 3.19 in den Mittelwertsatz eingesetzt und die Randintegrale durch diskrete Summen entlang der Zellränder ersetzt, ergibt sich eine Gleichung, mit der Mittelwerte der Ableitungen von  $u$  aus den Werten von  $u$  im Sinne einer Approximation mit finiten Differenzen berechnet werden können:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m = \frac{\sum_{i=1}^N (u_{i+1} + u_i)(y_{i+1} - y_i)}{\sum_{i=1}^N (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)} \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m = \frac{-\sum_{i=1}^N (u_{i+1} + u_i)(x_{i+1} - x_i)}{\sum_{i=1}^N (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)} \quad (3.21)$$

Zur Diskretisierung des Gebietes werden im allgemeinen Zellen mit vier Eckpunkten bzw. Knoten verwendet, dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Integrationspfade für die Randintegrale zu definieren. Drei mögliche Pfade sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

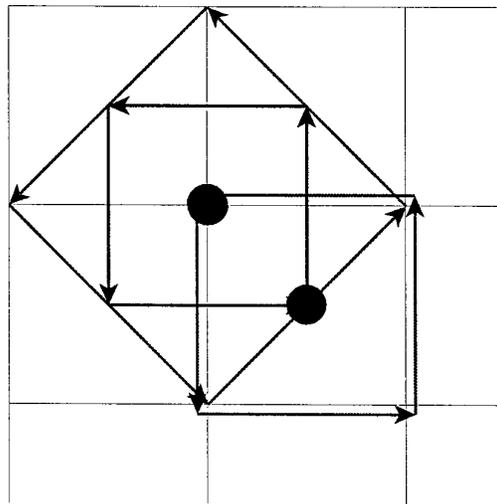


Abbildung 3.1: Mögliche Integrationspfade für die Randintegrale in zweidimensionalen Finite-Differenzenverfahren (Integral-Differenzen-Methode)

Je nachdem, welcher Integrationspfad gewählt wird, werden Ableitungen an den Knotenpunkten des Gitters oder im Mittelpunkt der Zelle berechnet. Wenn beispielsweise die Deformationsraten in der Mitte der Zelle und die Beschleunigungen an den Knotenpunkten berechnet werden, entspricht das resultierende Schema einem einfachen quadrilateralen Finiten Element mit einem Integrationspunkt in der Elementmitte. Die Randintegrale entsprechen dann dem Integral in der

schwachen Form der Differentialgleichungen. Dieses Prinzip läßt sich auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinern.

### 3.3.2 Ansatzverfahren

Ansatzverfahren sind dadurch zu kennzeichnen, daß eine näherungsweise Lösung  $u_h$  des Differentialproblems  $Lu=f$  in der Form

$$u_h(x) = \sum_{K=1}^n a_K \Phi_K(x) \quad (3.22)$$

gesucht wird.  $\Phi_K$  sind linear unabhängige Ansatzfunktionen,  $a_K$  zunächst unbekannte Parameter an  $n$  im folgenden Knoten genannten Punkten. Die  $a_K$  sind so zu bestimmen, daß  $u_h$  die gesuchte Lösung der Differentialgleichung möglichst gut approximiert. Hier sind verschiedene Ansätze möglich (vgl. z.B. Bathe, 1986, Großmann & Roos, 1994), die letztlich dazu dienen, ein System von Gleichungen zu erstellen, das nach den unbekanntem  $a_K$  an den Knoten aufgelöst werden kann. Oft werden als Koeffizienten  $a_K$  direkt die unbekanntem Werte der Funktion an den Knoten  $u_K$  eingesetzt, so daß die Lösung des Gleichungssystems unmittelbar nach den  $u_K$  erfolgt.

Eine (selten verwendete) Möglichkeit zur Erstellung des Gleichungssystems besteht in einem „Least-Squares“-Ansatz: gesucht wird dabei das Minimum des Quadrates des Defektes

$$\int_{\Omega} (Lu_h - f)^2 d\Omega \rightarrow \min \quad (3.23)$$

In Kollokationsverfahren wird die Differentialgleichung in den  $n$  diskreten Punkten, den Kollokationsstellen  $\xi_K$ , direkt erfüllt:

$$(Lu_h - f)(\xi_K) = 0 \quad (3.24)$$

Aufgrund dieser Eigenschaft haben Kollokationsverfahren eine gewisse Ähnlichkeit mit Differenzenverfahren (die Ansatzfunktionen können so (linear) definiert werden, daß beide Verfahren identisch sind). Im allgemeinen ergibt sich jedoch durch die Verwendung der Ansatzfunktionen ein anderes Gleichungssystem als bei der Diskretisierung mit Finiten Differenzen.

Bei Petrov-Galerkin-Verfahren wird der Defekt zunächst mit einer Testfunktion multipliziert, bevor das Integral über das Gebiet ermittelt wird.

$$\int_{\Omega} (Lu_h - f) \psi_K d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

Das Petrov-Galerkin-Verfahren bildet die Grundlage sowohl der Methode der Finiten Elemente als auch einiger netzfreier Verfahren und wird daher im folgenden anhand der Diskretisierung der schwachen Form der Impulserhaltungsgleichung

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} [(\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{x} - \sigma : \nabla \delta \mathbf{x}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\tau}} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{x} d\Gamma_{\tau} = 0 \quad (3.26)$$

weiter erläutert. Den Testfunktionen  $\psi_K$  entsprechen hier die virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{x}$ . Diese

werden - ähnlich den Ansatzfunktionen - approximiert durch eine Summation über mit einer Approximationsfunktion multiplizierte Werte an diskreten Punkten

$$\hat{\alpha}_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^n \Psi_K(\mathbf{x}) \hat{\alpha}_K \quad (3.27)$$

Der Gradient der Testfunktion wird entsprechend angenähert durch

$$(\nabla \hat{\alpha}(\mathbf{x}))_h = \sum_{K=1}^n \hat{\alpha}_K \otimes \nabla \Psi_K(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

Die Ansatzfunktionen müssen wie die Testfunktionen stetig sein, daneben müssen sie die Randbedingungen  $\Gamma_v$  a priori erfüllen. Die Ansatzfunktionen dienen zur Approximation der Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen:

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{K=1}^n \Phi_K(\mathbf{x}) \mathbf{v}_K \quad , \quad \mathbf{a}_h(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = \sum_{K=1}^n \Phi_K(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}_K}{dt} \quad (3.29)$$

Wenn für Test- und Ansatzfunktionen dieselben Approximationsfunktionen gewählt werden ( $\Psi = \Phi$ ), spricht man von einem Galerkin-Verfahren. Einsetzen der Approximationen von Ansatz- und Testfunktionen in die schwache Form liefert für das Galerkin-Verfahren

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \rho \sum_{J=1}^n \Phi_J(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}_J}{dt} - \rho \mathbf{f} \right) \cdot \sum_{K=1}^n \Phi_K(\mathbf{x}) \hat{\alpha}_K + \sigma \cdot \sum_{K=1}^n \hat{\alpha}_K \otimes \nabla \Phi_K(\mathbf{x}) \right] d\Omega \quad (3.30)$$

$$- \int_{\Gamma_\tau} \tau \cdot \sum_{K=1}^n \Phi_K(\mathbf{x}) \hat{\alpha}_K d\Gamma_\tau = 0$$

Nach Umformung und Vorziehen der  $\hat{\alpha}_K$  ergibt sich

$$\int_{\Omega} \sum_{K=1}^n \left[ \hat{\alpha}_K \cdot \left( \rho \sum_{J=1}^n \Phi_J(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}_J}{dt} - \rho \mathbf{f} \right) \cdot \Phi_K(\mathbf{x}) + \sigma \cdot \nabla \Phi_K(\mathbf{x}) \right] d\Omega \quad (3.31)$$

$$- \int_{\Gamma_\tau} \sum_{K=1}^n \left[ \hat{\alpha}_K \cdot (\tau \Phi_K(\mathbf{x})) \right] d\Gamma_\tau = 0$$

Wenn die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht wird, läßt sich schreiben

$$\sum_{K=1}^n \hat{\alpha}_K \cdot \int_{\Omega} \left[ \left( \rho \sum_{J=1}^n \Phi_J(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}_J}{dt} - \rho \mathbf{f} \right) \cdot \Phi_K(\mathbf{x}) + \sigma \cdot \nabla \Phi_K(\mathbf{x}) \right] d\Omega \quad (3.32)$$

$$- \sum_{K=1}^n \hat{\alpha}_K \cdot \int_{\Gamma_\tau} [\tau \Phi_K(\mathbf{x})] d\Gamma_\tau = 0$$

Diese Gleichung muß für einen beliebigen Satz virtueller Verrückungen  $\hat{\alpha}_K$  gültig sein, daher muß die Summe der beiden Integrale für jeden Knoten  $K$  0 sein. Umformen nach dem Beschleunigungsterm ergibt:

$$\int_{\Omega} \rho \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{x}) \frac{dv_j}{dt} \cdot \Phi_K(\mathbf{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \Phi_K(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho f \Phi_K(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_\tau} [\tau \Phi_K(\mathbf{x})] d\Gamma_\tau \quad (3.33)$$

Die Gleichung gilt für alle  $n$  Knoten  $K$  im Gebiet  $\Omega$ . Das entstehende Gleichungssystem (bestehend aus  $n \times n_D$  Gleichungen, wenn  $n_D$  die Anzahl der betrachteten Raumdimensionen ist) läßt sich nach den Beschleunigungen  $dv_j/dt$  auflösen. Wesentlich dabei ist, auf welche Weise die Integration der schwachen Form durchgeführt wird, dies kann mit Hilfe eines Berechnungsnetzes oder auch netzfrei geschehen. Bilden Verbindungslinien zwischen Knoten (Flächen im dreidimensionalen Fall) abgegrenzte Teilgebiete, die numerisch integriert werden, erhält man die Methode der Finiten Elemente; sind die Knoten nicht fest an die Integrationsgebiete gekoppelt, eine netzfreie (oder „gitterfreie“) Methode. Im allgemeinen wird für die numerische Integration gegeneinander abgegrenzter Gebiete das Gaußsche Integrationsverfahren angewandt; für  $\mathbf{x}$  ist dann jeweils die Koordinate des Integrationspunktes einzusetzen. Spannungen und Dichte sind an den Integrationspunkten anzugeben, ebenso die Werte der Ansatzfunktion bzw. ihrer Ableitung. Die Gleichungen werden zweckmäßig für jeden Integrationspunkt und jeden zugehörigen Knoten ausgewertet, anschließend werden alle Gleichungen zu jeweils denselben Knoten aufaddiert (das Gleichungssystem wird assembliert).

Neben der Berechnung der Beschleunigungen dient das Ansatzverfahren gleichzeitig einem weiteren Zweck: Die Spannungen an den Integrationspunkten sind über die Zeit zu integrieren, hierzu ist eine objektive Spannungsrate (vgl. Abschnitt 2.2.3) zu verwenden, und für die benötigten Deformations- und Rotationsraten muß der Geschwindigkeitsgradient bekannt sein. Dieser kann mit Hilfe der Ansatzfunktionen aus den Geschwindigkeiten der Knoten berechnet werden:

$$\nabla \mathbf{v} = \sum_{K=1}^n \mathbf{v}_K \otimes \nabla \Phi_K \quad (3.34)$$

Auf der Grundlage der Deformationsraten kann, wie in Kapitel 2 erläutert, die Integration der Spannungen unter Berücksichtigung der Materialgesetze für Plastizität, Versagen etc. erfolgen.

### 3.3.2.1 Finite Elemente

Finite Elemente erfüllen im Rahmen eines Ansatzverfahrens im wesentlichen zwei Funktionen: sie definieren die Ansatzfunktionen  $\Phi(\mathbf{x})$  (und damit beim hier betrachteten Galerkin-Verfahren auch die Testfunktionen  $\Psi$ ) und stellen eine numerische Integrationsmethode zur Verfügung. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Verwendung lokaler Koordinaten  $\xi$ , durch die eine allgemeine, effiziente Implementierung eines Elementes möglich wird.

Als Ansatzfunktionen  $\Phi(\mathbf{x})$  werden die sogenannten Formfunktionen  $N(\xi)$  verwendet, in denen nur die Werte an den Knoten des Elementes, in dem der betrachtete Punkt  $\mathbf{x}$  liegt, berücksichtigt

werden:

$$u^h(\mathbf{x}) = u^h(\xi) = \sum_{K=1}^{n_{en}} N_K(\xi) u_K \quad (3.35)$$

Die lokalen Koordinaten werden im allgemeinen so definiert, daß sie in den betrachteten Raumdimensionen Werte von -1 bis 1 annehmen. Die Formfunktionen sind so normiert, daß die Summe über die im Element vorhandenen Knoten  $n_{en}$  an jeder Stelle im Element 1 ergibt. Außerdem ist der Wert einer Formfunktion  $N_K$  am zugehörigen Knoten  $K$  selbst 1, an allen anderen Knoten 0. Durch diese Eigenschaft ist die Näherung  $u^h$  an einem Knoten immer gleich dem Knotenwert  $u_K$ , aufgrund dieser Eigenschaft werden die Formfunktionen auch Interpolationsfunktionen genannt. Die einfachsten Formfunktionen sind lineare Funktionen der lokalen Koordinaten  $\xi$ , für Elemente höherer Ordnung werden z.B. Lagrange-Polynome eingesetzt.

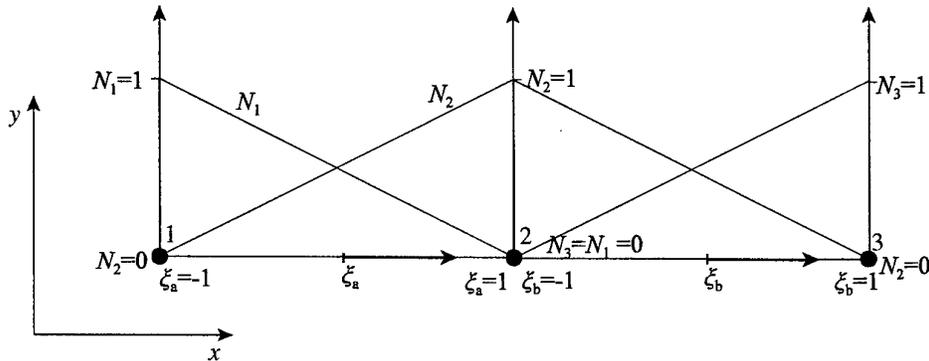


Abbildung 3.2: Eindimensionale Elemente (a,b) mit Knoten (1, 2, 3), lokalen Koordinaten  $\xi$  und Formfunktionen  $N$

Der Großteil der in der Praxis verwendeten Elemente ist isoparametrisch: für die Berechnung der Koordinaten  $\mathbf{x}(\xi)$  werden dieselben Formfunktionen  $N_K$  verwendet wie für die Approximation selbst:

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{K=1}^{n_{en}} N_K(\xi) \mathbf{x}_K \quad (3.36)$$

Diese Beziehung ist von großer Bedeutung, da sie für die Berechnung der Gradienten benötigt wird, die in der schwachen Form und bei der Berechnung der Deformationsraten (Glg. 3.34) auftauchen. Allgemein gilt für den Gradienten

$$\nabla^h u = \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \right)^h = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} \right)^h = \sum_{K=1}^{n_{en}} \frac{\partial N_K}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} u_K \quad (3.37)$$

Die Matrix  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  ist dabei aus der Inversen der Jacobi-Matrix zu berechnen:

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}^{-1} = J^{-1} \quad (3.38)$$

Die Ableitung von Glg. 3.36 ermöglicht die Berechnung der Elemente der Jacobi-Matrix:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{N_k(\xi)}{\partial \xi} x_k \quad (3.39)$$

Das isoparametrische Konzept hat den Vorteil, daß bei seiner Verwendung die Konvergenz für die Approximation durch das Element gewährleistet ist. Nach Hughes (1987), S. 109 ff, kann die Konvergenz für die näherungsweise Lösung der schwachen Form mit dem Galerkin-Verfahren sichergestellt werden, wenn die folgenden Bedingungen für die Ansatzfunktionen erfüllt sind ( $m$  sei hier der maximale Grad der in der schwachen Form vorkommenden Ableitungen):

- Die Formfunktionen müssen innerhalb eines Elementes  $C^m$ -kontinuierlich sein, das heißt, alle Ableitungen der Formfunktionen bis zur  $m$ -ten Ableitung dürfen im Elementinneren keine Sprünge aufweisen.
- Sie müssen über die Elementgrenzen hinweg  $C^{m-1}$  kontinuierlich verlaufen.
- Sie müssen vollständig in dem Sinne sein, daß sie Polynome vom Grad  $m$  exakt reproduzieren können (Vollständigkeit, engl. „completeness“). Im vorliegenden Fall ist  $m=1$ , also muß durch die Formfunktionen eine beliebige lineare Funktion im Elementinneren exakt wiedergegeben werden, wenn die Knotenwerte entsprechend belegt sind.

Die 1. und 2. Bedingung zusammen werden auch als „Kompatibilitätsbedingung“ bezeichnet, für strukturmechanische Probleme bedeutet sie, daß zwischen den Elementrändern keine Spalten entstehen, wenn diese sich verformen (vgl. Bathe, 1986, S. 189).

Die numerische Integration der schwachen Form verläuft zweckmäßig ebenfalls in den natürlichen Koordinaten. Mit der Determinante der Jacobi-Matrix  $\det J$ , der mit dem Faktor  $1/8$  die Transformation des Volumens im Raum  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , auf den Raum  $x_1, x_2, x_3$ , bewirkt, gilt für das Integral über das Elementvolumen

$$\int_{\Omega_{el}} f(x) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{1}{8} \det J(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3.40)$$

Grundidee der numerischen Integration ist die Berechnung des bestimmten Integrals durch eine Summe aus Produkten der Funktionswerte an  $n_{ep}$  Stützstellen  $p$  auf dem Element mit zugehörigen Wichtungskoeffizienten  $w_p$ :

$$I := \int_a^b f(x) dx \rightarrow I \approx \sum_{p=1}^{n_{ep}} w_p f(x_p) \quad ; \quad x_p \in [a, b] \quad (3.41)$$

Ein Polynom  $m$ -ten Grades läßt sich durch eine numerische Integration auf der Basis von

minimal  $m/2 + 1$  Stützstellen exakt integrieren, für die exakte Ermittlung des Integrals über eine durch lineare Ansatzfunktionen approximierte Variable sind für jede Raumrichtung mindestens 2 Stützstellen erforderlich (Schwarz, 1993, S. 359 ff). Das allgemein verwendete Gaußsche Integrationsverfahren gibt die entsprechenden Gewichtungsfaktoren und die Lage der Stützstellen an. Für das Intervall  $[-1,1]$  und verschiedene Polynomgrade sind diese tabelliert, z. B. in Bathe, 1986, S. 307. Die Stützstellen liegen generell im Inneren der Elemente, nicht auf dem Rand. Damit läßt sich das Integral für ein allgemeines dreidimensionales Element berechnen durch

$$\int_{\Omega_{El}} f(x) d\Omega = \sum_{p=1}^{n_{ep}} w_p f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_p \frac{1}{8} \det \mathbf{J}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_p \quad (3.42)$$

Die Wahl der Integrationsordnung ist allerdings nicht unbedingt so zu treffen, daß sie dem Polynomgrad der Ansatzfunktionen entspricht. Häufig wird ein niedrigerer Ansatzgrad gewählt, wie auch bei den in dieser Arbeit verwendeten Elementen, deren konkrete Darstellung sich in Kapitel 5 findet. Zum einen wird hierdurch der numerischen Aufwand erheblich reduziert, zum anderen kann dies auch positive Auswirkungen auf das Elementverhalten haben. Malkus und Hughes (1978) zeigten, daß die Ergebnisse der reduzierten Integration in vielen Fällen der sogenannten „gemischten Formulierung“ entsprechen, die beispielsweise für inkompressible oder nahezu inkompressible Materialien, bei denen eine Standard-Formulierung zu großen Fehlern führen kann, entwickelt wurde. Allerdings führt die reduzierte Integration auch zu sogenannten „Null-Energie-Moden“, Verformungszuständen des Elementes, die keine Spannungsänderungen zur Folge haben und durch gesonderte Verfahren zu behandeln sind.

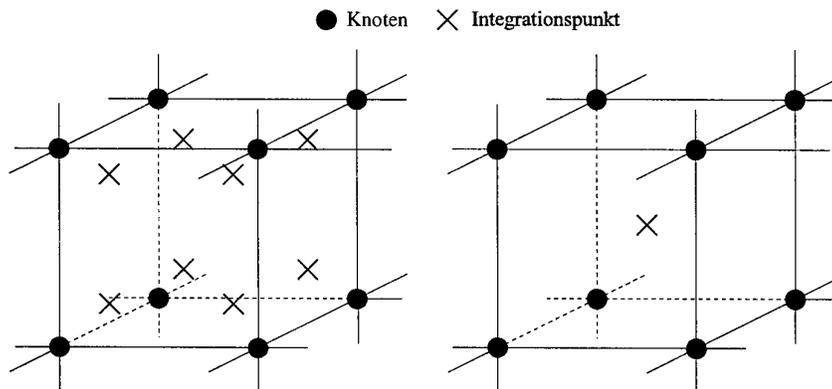


Abbildung 3.3: Hexaederelement mit voller und reduzierter Integration

### 3.3.2.2 Netzfrie Verfahren

Unter den netzfrienen Verfahren sind zunächst kontinuierliche und diskontinuierliche Ansätze zu unterscheiden. Die ursprünglich für die Beschreibung des Verhaltens von granularen Materialien wie Sand oder geklüfteter Fels entwickelte Methode der Diskreten Elemente (Cundall & Strack, 1979) ist ein diskontinuierliches Verfahren. Sie basiert auf der Berechnung von Kräften

zwischen starren oder verformbaren Scheiben, Kugeln, Quadern oder (je nach Problemstellung) anderen geometrischen Körpern. Die Methode wurde zwischenzeitlich so erweitert, daß sie auch auf andere Materialien wie Beton (Ishikawa et al., 1997; Cundall & Konietzky, 1996) angewendet wird. Da sie jedoch nicht auf kontinuumsmechanischen Ansätzen beruht, ist das Materialverhalten in ganz eigener Weise zu beschreiben. Die Methode der Diskreten Elemente wird in dieser Arbeit daher nicht weiter betrachtet. Ebenfalls nur genannt werden sollen an dieser Stelle die Methoden der Mikromechanik, die insbesondere für die Simulation des Verhaltens in der Mikrostruktur eingesetzt werden (siehe z. B. Ortiz, 1996).

Innerhalb der auf kontinuumsmechanischen Ansätzen beruhenden Verfahren ist die Bedeutung der Bezeichnung „netzfrei“ mitunter strittig: In dieser Arbeit werden alle Verfahren netzfrei genannt, die die Bewegung nicht miteinander verbundener Punkte beschreiben, auch wenn zur Berechnung etwa der Beschleunigungen ein Hintergrundnetz verwendet wird. Für die netzfreien Verfahren sind verschiedene Entwicklungspfade zu nennen:

1.) „Particle in Cell“ oder „Material Point“-Methoden (Harlow, 1964; Sulsky & Schreyer 1996; Bardenhagen et al., 1999): Diese arbeiten mit Lagrange-Partikeln, die sich in einem Euler-Netz bewegen; das Euler-Netz dient dabei zur Lösung der Erhaltungsgleichungen, während die Lagrange-Partikel die Bewegung des Materials beschreiben.

2.) Verallgemeinerungen von Differenzen-Verfahren für beliebig verteilte Punkte: Kern dieser Verfahren ist die Definition eines möglichst geeigneten Differenzen-Sternes aus den umliegenden Punkten (Jensen, 1972; Liszka & Orkisz, 1977; Perrone & Kao, 1975). Sie bilden die Grundlage des „hp-Cloud“-Verfahrens (Liszka et al., 1996; Duarte & Oden (1996) und werden inzwischen häufig mit einer Least-Squares-Approximation verbunden (Baty & Wolfe, 1997). Als netzfrei kann auch die Methode von Dukowicz, Cline & Adesso (1989) betrachtet werden: Hier wird in jedem Zeitschritt für die Menge der betrachteten Punkte ein sogenanntes Voronoi-Diagramm konstruiert, das den Raum in Regionen, in denen sich jeweils nur ein Punkt befindet, zerlegt. An den Rändern dieser Regionen werden die Riemannschen Differentialgleichungen (bzw. die Hugoniot-Gleichungen) mit Hilfe eines Godunov-Schemas gelöst.

3.) Die Methode der Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) (Lucy, 1977; Monaghan 1982,1), die durch ein statistisches Approximationsverfahren mittels einer sog. „Kernel“-Funktion begründet wurde, und ihre Weiterentwicklungen. Sie werden in dieser Arbeit verwendet und in Kapitel 6 eingehender erläutert.

4.) Galerkin-Methoden auf der Basis einer „Moving Least Squares“-Approximation („Diffuse Element Method“, Nayroles, Touzot & Villon, 1992) und Weiterentwicklungen wie die Elementfreie Galerkin-Methode (EFG) (Belytschko, Lu & Gu, 1994), Meshless Petrov Galerkin (MLPG) (Atluri, Kim & Cho, 1999), Reproducing Kernel Particle Methode (RKPM) (Liu & Chen, 1995).

5.) Ein eigener Weg ist mit dem NABOR Code durch Johnson (1983) bzw. Johnson, Stryk & Dodd (1986) beschrieben worden, der jedoch zwischenzeitlich durch eine Umstellung auf die SPH-Methode aufgegeben wurde (Johnson & Petersen, 1993).

Die am häufigsten eingesetzten netzfreien Verfahren sind einerseits die in dieser Arbeit verwendete SPH-Methode, andererseits netzfreie Galerkin-Verfahren. Beide sind im Grundsatz als Ansatzverfahren zu betrachten, basieren also auf dem Approximationsansatz

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_J^n \alpha_J \Phi_J(\mathbf{x}) \quad (3.43)$$

Dabei werden, wie bei der FE-Methode, für die unbekanntenen Koeffizienten  $\alpha_J$ , die an Stützstellen (Knoten) bekannten Funktionswerte  $u_J$ , eingesetzt:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_J^n u_J \Phi_J(\mathbf{x}) \quad (3.44)$$

Im Rahmen der FE-Methode werden die Ansatzfunktionen durch die Formfunktionen auf Elementebene vorgegeben. Die Formfunktionen definieren, welche Knotenwerte in die Berechnung der Approximation eingehen, und sie legen die Gewichtung der Knotenwerte untereinander fest. Durch die Formulierung in lokalen Koordinaten sind die Formfunktionen unabhängig von den Knotenverschiebungen, sie sind darüber hinaus für alle Elemente eines bestimmten Typs dieselben.

Bei netzfreien Methoden ist im allgemeinen zunächst zu bestimmen, welche Nachbarknoten bei der Approximation berücksichtigt werden. Erst danach können Ansatzfunktionen konstruiert und ihre Werte an den Nachbarknoten berechnet werden. Der zusätzliche Aufwand für die Bestimmung der Nachbarknoten und die Festlegung der Ansatzfunktionen ist letztendlich die Ursache für den höheren numerischen Aufwand der netzfreien Verfahren. Ein netzfreies Approximationsverfahren löst die in Abbildung 3.4 dargestellte Aufgabe, in einem Gebiet  $\Omega$  einen Wert  $u_h$  (oder Ableitungen von  $u$ ) an einer Stelle  $\mathbf{x}_i$  aus Werten  $u_J$  zu approximieren, die an im zu definierenden Einflußbereich  $\Omega_i$  liegenden Punkten  $\mathbf{x}_J$  gegeben sind. Grundsätzlich können für diese Approximation ganz verschiedene Methoden in Betracht kommen, etwa Interpolationsmethoden, wie sie von Franke (1982) oder Caruso & Quarta (1998) vergleichend untersucht wurden, oder Approximationsverfahren wie die Methode der „Moving Least Squares“ (MLS) (Lancaster & Salkauskas, 1981). *Interpolation* wird hier verwendet für Verfahren, bei denen die Näherungswerte an den Stützpunkten exakt gleich den gegebenen Werten sind, während dies bei einer *Approximation* nicht der Fall sein muß.

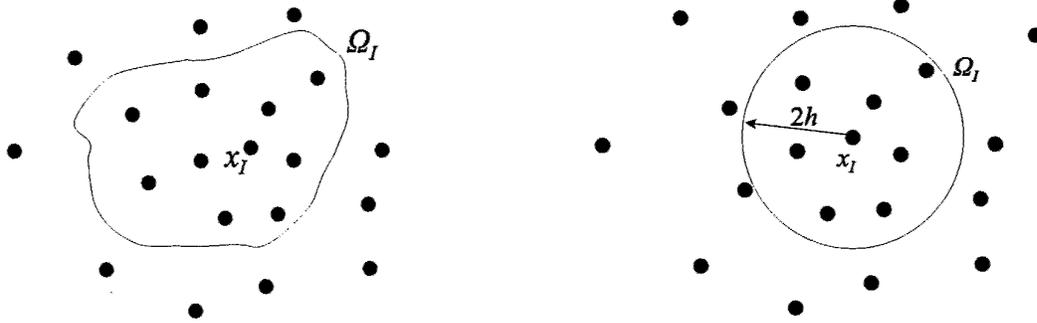


Abbildung 3.4: Netzfreie Approximation mit allgemeiner (links) und radialer Ansatzfunktion (rechts)

Gemeinsam ist den als Ansatzverfahren formulierten netzfreien Berechnungsverfahren für Strukturprobleme die Verwendung einer Wichtungsfunktion als Ausgangspunkt für die Konstruktion der Ansatzfunktionen. Die Wichtungsfunktion ist dabei so beschaffen, daß die nähergelegenen Punkte ein höheres Gewicht als weiter entfernt liegende Punkte erhalten. Als Wichtungsfunktion kann beispielsweise der in Abbildung 3.5 dargestellte kubische B-Spline dienen. Hier ist die Größe des Interpolationsradius wie in Abbildung 3.4  $2h$ ,  $r$  ist der Abstand des Punktes, an dem der Wert der Wichtungsfunktion gesucht wird, vom betrachteten Punkt  $x_i$  (also der Betrag des Vektors  $x_j - x_i$ ), und  $W$  ist der Wert der Wichtungsfunktion.

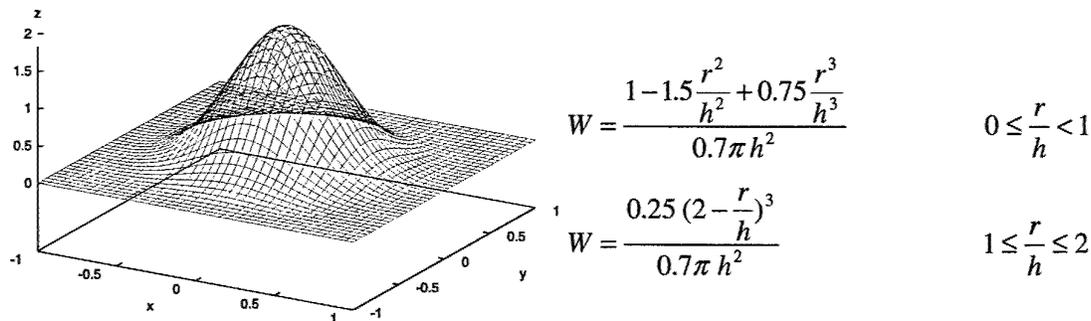


Abbildung 3.5: Wichtungsfunktion (kubischer B-Spline)

Der einfachste Ansatz zur Konstruktion der Ansatzfunktion, der dem ursprünglichen SPH-Verfahren zugrunde liegt, ist die Skalierung der Wichtungsfunktion selbst, so daß die Summe aller Werte der Wichtungsfunktionen an jeder Stelle 1 ergibt:

$$\sum_j^n W_j(|x_j - x_i|, h) = 1 \quad (3.45)$$

Die Summation erfolgt dabei nur über die innerhalb des Interpolationsradius gelegenen  $n$  Nachbarpunkte von  $x_i$ . Diese skalierte Wichtungsfunktion kann direkt in den Approximationsansatz eingesetzt werden.

$$u_h(\mathbf{x}_I) = \sum_J^n u_J W_J(|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I|, h) \quad (3.46)$$

Häufig wird auch das Shepard (1968) zugeschriebene Verfahren verwendet, nicht skalierte Wichtungsfunktionen durch die Division durch die Summe der Wichtungsfunktionswerte zu normieren:

$$\Phi_J = \frac{W_{JI}}{\sum_J W_{JI}} \quad (3.47)$$

Damit ergibt sich der Approximationsansatz

$$u_h(\mathbf{x}_I) = \sum_{J=1}^n \frac{W_{JI}}{\sum_{K=1}^n W_{KI}} \quad (3.48)$$

Schließlich sei noch das Verfahren der „Moving Least Squares“ (MLS) etwas näher erläutert, da es bei den netzfreien Galerkin-Verfahren vielfach verwendet wird und inzwischen auch in die SPH-Methode Eingang gefunden hat. Während bei Standard-Least-Squares-Verfahren eine globale Funktion mit globalen Parametern so angepaßt wird, daß der Approximationsfehler im gesamten Gebiet minimal wird, erfolgt bei MLS die Anpassung lokal. An jeder Stelle, an der ein Funktionswert approximiert werden soll, werden aus den benachbarten Punkten die Parameter einer lokalen Ansatzfunktion so bestimmt, daß eine optimale Anpassung erfolgt.

Das MLS-Verfahren beruht auf der Summation über ein Produkt aus  $m$  Polynomtermen und an jeder Stelle  $\mathbf{x}$  zu bestimmenden Koeffizienten  $\mathbf{a}$ :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \quad (3.49)$$

Die Anzahl der Polynomterme  $m$  bestimmt dabei den Grad der Approximation: für  $m=1$  ist  $p=\{1\}$ , für  $m=3$  ist  $p=\{1, x, y\}$ , für  $m=6$  ist  $p=\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$  etc. Eine Minimierung der mit einer Wichtungsfunktion  $W$  gewichteten Fehlerquadrate (vgl. Lancaster & Salkauskas, 1981) führt auf die Approximationsformel ( $\mathbf{p}$  ist hier als Vektor mit  $m$  Komponenten geschrieben,  $\mathbf{u}$  ist der Vektor der Knotenwerte an  $n$  Nachbarknoten)

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I) \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)}_{\phi(\mathbf{x}_I)} \cdot \mathbf{u} \quad (3.50)$$

Hierbei ist die  $m \times m$ -Matrix  $\mathbf{A}$  definiert durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_I) = \sum_{J=1}^n W_{JI} \mathbf{p}(\mathbf{x}_J) \otimes \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_J) \quad (3.51)$$

und der Vektor  $\mathbf{B}$  durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_I) = [W_{JI} \mathbf{p}(\mathbf{x}_J)] = [W_{1I} \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), W_{2I} \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, W_{nI} \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (3.52)$$

Das Verfahren erfordert die Inversion der Matrix  $A$ , hat dafür jedoch den Vorteil, daß eine konsistente Approximation der  $k$ ten Ableitung durch

$$\nabla^k u^h(x_I) = \nabla^k \Phi(x_I) \cdot u = \nabla^k (p^T(x_I) A^{-1}(x_I) B(x_I)) \cdot u \quad (3.53)$$

erfolgen kann, wenn der Polynomgrad entsprechend gewählt wird. Daneben ist es möglich, durch Erweiterung der Basis  $p$  (beispielsweise um trigonometrische oder singuläre Funktionen) der Approximation besondere gewünschte Eigenschaften zu geben (etwa zur Approximation des Verschiebungsfeldes an einer Rißspitze, vgl. Belytschko, Gu & Lu, 1994).

An dieser Stelle sei noch angemerkt, daß die dargestellten Approximationsverfahren als Sonderfälle des allgemeiner formulierten Konzeptes der „Partitions of Unity“ betrachtet werden können (Melenk & Babuška, 1996).

Neben den Verfahren für die Bestimmung der Ansatzfunktion ist die Art und Weise der Formulierung eines netzfreien Berechnungsverfahrens entscheidend für seine Einordnung. Im Unterschied zu den netzfreien Galerkin-Verfahren sind die SPH-Methoden in der starken Form, als Kollokationsverfahren, formuliert. Durch Attaway, Heinstein & Swegle (1994), Dilts (1999) und Belytschko et al. (1998) wurden Vorgehensweisen dargestellt, wie sich SPH-Methoden auch aus der schwachen Form herleiten lassen. In der Standard-Form des SPH-Verfahrens sind alle Variablen in jedem Stützpunkt bzw. Partikel definiert, durch Dyka & Ingel (1995) wurde jedoch eine eindimensionale Form vorgestellt, in der Spannungen und Deformationsraten an Zwischenpunkten zwischen den Stellen, an denen Masse und Geschwindigkeit plaziert sind, ausgewertet werden. Damit gelang es, die Stabilität des SPH-Verfahrens zu verbessern, und Libersky & Randles (1999) haben dieses Konzept für dreidimensionale Berechnungen angewandt. Beide Möglichkeiten sind in der folgenden Abbildung beispielhaft dargestellt.

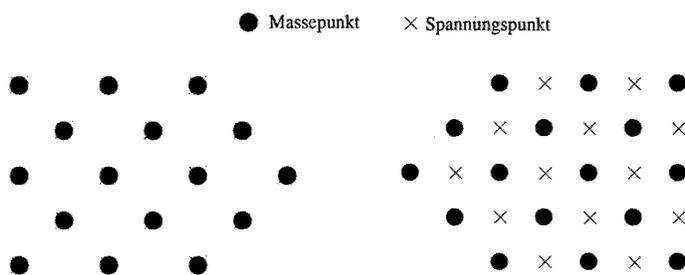


Abbildung 3.6: Möglichkeiten der Variablenplatzierung für netzfreie Kollokationsverfahren: Standard SPH-Methode und Trennung von Spannungs- und Massepunkten

Demgegenüber sind für netzfreie Galerkin-Verfahren auf der Basis der schwachen Form verschiedene Möglichkeiten der Integration zu betrachten. Die meisten derzeit gebräuchlichen Verfahren (EFG, RKPM, etc.) basieren auf der Anwendung von Hintergrundzellen zur Integration (Abbildung 3.7 links). Beissel & Belytschko (1996) stellten auch eine Form mit

knotenweiser Integration vor und beobachteten dabei das Auftreten von Instabilitäten ähnlich denen bei der Standard-SPH-Methode, die sie durch zusätzliche Berücksichtigung von Termen mit Ableitungen zweiter Ordnung in der schwachen Form, wie sie als Quadrat des Residuums im Galerkin-Verfahren auftauchen, kontrollieren.

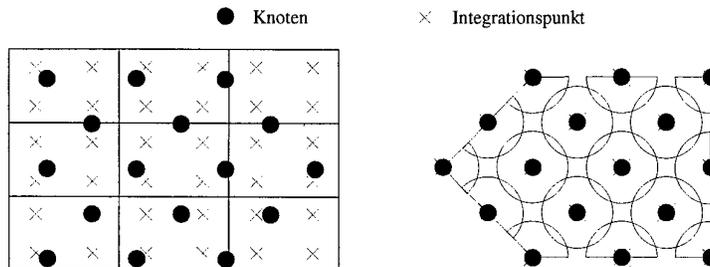


Abbildung 3.7: Integrationsschemata bei netzfreien Galerkin-Verfahren: Hintergrundzellen und knotenweise Integration

Beim Meshless-Petrov-Galerkin-Verfahren (MLPG) (Atluri, Kim & Cho, 1999) erfolgt die Integration ebenfalls netzfrei. Die Integrationsgebiete werden dabei aber aus den Überschneidungsflächen der (durch den Interpolationsradius definierten) Approximationsgebiete für Test- und Ansatzfunktionen bestimmt, diese Überschneidungsflächen werden in einen Einheitskreis transformiert und auf diesem numerisch integriert.

Insgesamt ist die geeignete numerische Integration derzeit noch ein Gebiet intensiver Forschungsarbeiten. Dolbow & Belytschko (1999) untersuchten beispielsweise die Auswirkungen verschiedener Integrationsvarianten in der Element-Free-Galerkin Methode. Neben anderen stellten Chen, Yoon & Wu (1999) eine verbesserte Integrationsmethode vor.

Für Impaktprobleme mit großen Verzerrungen, Rißbildung und Fragmentierung, wie sie in dieser Arbeit behandelt werden, sind generell Verfahren ohne Hintergrundnetz zur Integration - wie das in dieser Arbeit verwendete SPH-Verfahren - vorzuziehen, da ansonsten die Vorteile der netzfreien Methode zum Teil wieder aufgegeben werden, da das Hintergrundnetz gegebenenfalls anzupassen ist.



## 4. VERFAHREN DER ZEITLICHEN DISKRETISIERUNG

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Möglichkeiten zur Diskretisierung der Impulserhaltungsgleichung und der Berechnung räumlicher Ableitungen dargestellt. Die Erhaltungsgleichungen erhalten jedoch neben den räumlichen auch zeitliche Ableitungen, und für die Lösung in der Zeit ist der Einsatz verschiedener Verfahren möglich.

Die vielleicht fortschrittlichsten Methoden der zeitlichen Diskretisierung sind die Raum-Zeit-Galerkin-Verfahren: hier wird eine Galerkin-Approximation für das räumliche Problem mit einer Galerkin-Approximation für das zeitliche Problem kombiniert. Dieses Verfahren bietet eine große Flexibilität und Stabilität (Hughes, 1999).

In der vorliegenden Arbeit wird ein Berechnungsverfahren, das auf der Kopplung eines Galerkin-Verfahrens auf der Basis der Finiten Elemente mit einem netzfreien Kollokationsverfahren auf der Basis der SPH-Methode beruht, entwickelt. Für die zeitliche Diskretisierung erscheint es daher sinnvoll, auf für beide räumliche Diskretisierungsverfahren anwendbare Methoden zurückzugreifen. Dies sind nach heutigem Stand Finite-Differenzen-Approximationen.

In diesem Kapitel werden zunächst die zwei möglichen Grundformen der Zeitdiskretisierung (implizit und explizit) vorgestellt, wobei erläutert wird, warum die explizite Form für die betrachtete Problemstellung vorzuziehen ist. Anschließend werden verschiedene Möglichkeiten der Formulierung expliziter Verfahren vorgestellt und eine geeignete Methode ausgewählt. Für die gewählte Methode wird im dritten Abschnitt dargestellt, wie die zeitliche Diskretisierung in einem Integrationsalgorithmus realisiert wurde. Dabei war besonders darauf zu achten, daß der Ablauf dieses Algorithmus mit beiden räumlichen Diskretisierungsmethoden (FE und SPH) in Einklang zu bringen war. Im letzten Abschnitt wird das besondere Problem der Berechnung der Energieerhaltung diskutiert.

### 4.1 Explizite und Implizite Zeitintegration

Mit Hilfe der in Kapitel 3 erläuterten räumlichen Diskretisierungsverfahren kann die Impulserhaltungsgleichung

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.1)$$

gelöst und die Beschleunigung  $Dv/Dt$  an diskreten Punkten für einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  berechnet werden. Aus diesen Beschleunigungen sind dann Geschwindigkeiten zu berechnen (bzw. in der Zeit zu integrieren), mit den Geschwindigkeiten wiederum die neuen Koordinaten der Punkte zum nächsten Zeitschritt. Auf der Grundlage der neuen Konfiguration können dann neue Spannungen berechnet und die Impulserhaltungsgleichung erneut gelöst werden, so daß eine durchgängige Simulation - z. B. eines Impaktvorganges - erfolgen kann.

Zur Diskretisierung wird die Zeit in Intervalle der Größe  $\Delta t$  unterteilt. Bei Finiten Differenzen bieten sich für die Zeitdiskretisierung zunächst zwei verschiedene Alternativen an, die am Beispiel der Berechnung der Geschwindigkeiten aus den Beschleunigungen dargestellt werden. Der Vorwärtsdifferenzenquotient (vgl. Kapitel 3)

$$\dot{v}(t) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (4.2)$$

kann nach den neuen Geschwindigkeiten umgeformt werden:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \dot{v}(t)\Delta t \quad (4.3)$$

Man spricht hier von einem expliziten Verfahren: die Größen auf der rechten Seite der Gleichung zum Zeitpunkt  $t$  sind bekannt, man erhält direkt die neuen Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ . Diese hängen auch nur von den am betrachteten diskreten Punkt gegebenen Größen ab. Für die zeitliche Integration sind die diskreten Punkte entkoppelt. Es leuchtet ein, daß deswegen die Zeitschrittweite begrenzt werden muß. Weil die Spannungen sich mit der Verschiebung der Punkte untereinander ändern, ändert sich auch die Beschleunigung, und die zu Beginn des Zeitschrittes angenommene Beschleunigung ist nicht mehr gültig. Um die Stabilität expliziter Verfahren zu gewährleisten, sind daher Stabilitätskriterien zu berücksichtigen. Grundlegend ist das Courant-Friedrichs-Levy-Kriterium, das die Zeitschrittweite so begrenzt, daß sich eine Störung (z. B. eine Druckwelle oder sich bewegendes Material) innerhalb eines Zeitschrittes nicht weiter als die lokal durch die Diskretisierung im Raum gegebene kleinste Strecke (z. B. kleinste Seite eines Elementes oder einer Zelle, kleinster Abstand zum Nachbarpartikel etc.) fortbewegen kann:

$$\Delta t_{CFL} \leq \frac{\min \Delta s}{c + |v|} \quad (4.4)$$

Bei Verwendung einer künstlichen Viskosität sind zusätzliche Stabilitätskriterien zu berücksichtigen, wie in Kapitel 2 bereits dargestellt wurde. Wie von Wright (1998) gezeigt, sind streng genommen auch die Verhältnisse aufeinanderfolgender Zeitschrittlängen nicht beliebig wählbar: wenn bestimmte Folgen von Zeitschrittverhältnissen mehrfach hintereinander auftauchen, ist das explizite Verfahren nicht mehr stabil. Solche alternierenden Folgen tauchen in der Praxis allerdings selten auf.

Als Alternative zum Vorwärtsdifferenzenquotienten kann der Rückwärtsdifferenzenquotient verwendet werden:

$$\dot{\mathbf{v}}(t + \Delta t) = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \dot{\mathbf{v}}(t + \Delta t)\Delta t \quad (4.6)$$

Dieses Verfahren heißt implizit, da auf der rechten Seite die Beschleunigungen zum Zeitschritt  $t+\Delta t$  stehen, diese jedoch noch nicht bekannt sind. Das Verfahren ist mit der räumlichen Diskretisierung gekoppelt, die Beschleunigungen zum Zeitschritt  $t+\Delta t$  hängen über die Spannungen und Verschiebungen von den Geschwindigkeiten bei  $t+\Delta t$  ab. Implizite Verfahren haben den Vorteil, uneingeschränkt stabil zu sein, bei der Lösung werden prinzipiell nur Zustände erreicht, zu denen die berechnete Beschleunigung paßt. Trotzdem ist, insbesondere bei nichtlinearen Problemen, die Genauigkeit von der Zeitschrittgröße abhängig. Implizite Verfahren lassen sich sinnvoll nur in Form eines Gleichungssystems formulieren, das nach den Verschiebungen als Unbekannten aufzulösen ist. Das Gleichungssystem läßt sich aus der schwachen Form (Kapitel 3) herleiten (z. B. in Bathe, 1986). Mit den Bezeichnungen  $\mathbf{M}$  für die Massen-,  $\mathbf{C}$  für die Dämpfungs- und  $\mathbf{K}$  für die Steifigkeitsmatrix läßt sich dieses Gleichungssystem folgendermaßen schreiben, wobei  $\mathbf{U}$  der Vektor der Knotenverschiebungen,  $\mathbf{F}$  der Vektor der äußeren Lasten ist:

$$\mathbf{M}(t + \Delta t) \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}(t + \Delta t) \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}(t + \Delta t) \mathbf{U} = \mathbf{F}(t + \Delta t) \quad (4.7)$$

Werden Beschleunigungen und Geschwindigkeiten gleich Null gesetzt, kann aus der Gleichung auch eine statische Lösung ermittelt werden. Solange die Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{K}$  linear abhängig von  $\mathbf{U}$  sind, läßt sich das Gleichungssystem in einem einzigen Schritt (direkt oder iterativ) für den Zeitpunkt  $t+\Delta t$  lösen. Dies ist jedoch nur für ideal-elastische Aufgaben ohne Kontaktbedingungen der Fall. Sind nichtlineare Materialgesetze oder Kontakt zu berücksichtigen, ist das Gleichungssystem nur mit Hilfe besonderer Verfahren (z. B. Newton-Raphson-Methode) zu lösen. Die Lösung erfolgt dann inkrementell, die Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{K}$  müssen als Gradientenmatrizen in jedem Inkrement, in dem das globale Gleichgewicht neu berechnet wird, angepaßt werden. Damit geht häufig der Vorteil impliziter Verfahren verloren, explizite Verfahren sind dann effektiver. Für sehr große Strukturen mit nichtlinearem Verhalten können oft sogar ausschließlich explizite Verfahren angewandt werden, weil der Berechnungsaufwand mit der Anzahl der Freiheitsgrade nur linear steigt, während bei impliziten Verfahren der Aufwand für die Lösung des Gleichungssystems überproportional zunimmt (Will, 1999).

Für die Berechnung von Wellenausbreitungsproblemen sind implizite Verfahren grundsätzlich nicht geeignet, da hierfür die Zeitschrittweite auf die Größe des CFL-Kriteriums reduziert werden müßte; die implizite Lösung bedeutet dann einen erheblichen Mehraufwand.

Die Berechnung inkompressibler oder nahezu inkompressibler Strömungen unterhalb der Schallgeschwindigkeit erfolgt dagegen in der Regel mit impliziten Verfahren. Das CFL-Kriterium für explizite Verfahren würde aufgrund der gegen unendlich gehenden Schallgeschwindigkeit hier sehr kleine Zeitschritte liefern. Für Strömungsgeschwindigkeiten in der Nähe

oder über der Schallgeschwindigkeit sind explizite Verfahren jedoch optimal, daher wurden in der Vergangenheit auch Mischformen entwickelt, siehe z.B. Zienkiewicz, Szmelter & Peraire (1990).

Da in der vorliegenden Arbeit Impaktprobleme behandelt werden, in denen sowohl Kontaktbedingungen als auch die Wellenausbreitung eine große Rolle spielen, werden im folgenden nur explizite Verfahren betrachtet.

## 4.2 Möglichkeiten zur Formulierung expliziter Verfahren

### 4.2.1 Explizite Eulerdiskretisierung

Als explizite Eulerdiskretisierung wird die unmittelbare Umsetzung des Vorwärtsdifferenzenquotienten bezeichnet. Alle Variablen und zeitlichen Ableitungen werden dabei zum selben Zeitschritt  $n$  betrachtet. Die berechneten Größen zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  werden in den folgenden Gleichungen mit dem Index  $n+1$  bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \dot{\mathbf{v}}_n \Delta t_n \\
 \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \Delta t_n \\
 e_{n+1} &= e_n + \dot{e}_n \Delta t_n \\
 \rho_{n+1} &= \rho_n + (\nabla \cdot \mathbf{v})_n \Delta t_n \\
 \sigma_{n+1} &= f(\rho_{n+1}, e_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1}, \dots)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dieses Verfahren besitzt nur eine Genauigkeit erster Ordnung (Abbruch nach dem ersten Glied der Taylorreihe) und wird in Hydrocodes nicht verwendet, da Verfahren mit besserer Genauigkeit mit nur geringfügig höherem Aufwand verbunden sind und deutlich bessere Stabilitätseigenschaften aufweisen.

### 4.2.2 Prädiktor-Korrektor Verfahren

Das Prädiktor-Korrektor Verfahren ist ein Verfahren mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung, bei dem alle Variablen prinzipiell auch, wie bei der expliziten Eulermethode, zum gleichen Zeitpunkt betrachtet werden. Allerdings werden im Prädiktor-Schritt zunächst Zwischenwerte zum Zeitpunkt  $t+\Delta t/2$  berechnet:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{n+1/2} &= \mathbf{v}_n + \dot{\mathbf{v}}_n \frac{\Delta t_n}{2} \\
 \mathbf{x}_{n+1/2} &= \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \frac{\Delta t_n}{2} \\
 e_{n+1/2} &= e_n + \dot{e}_n \frac{\Delta t_n}{2}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Der Korrektor-Schritt ergibt dann wieder die Variablen zum nächsten vollen Zeitschritt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \dot{\mathbf{v}}_{n+1/2} \Delta t_n \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \Delta t_n \\ e_{n+1} &= e_n + \dot{e}_{n+1/2} \Delta t_n \end{aligned} \quad (4.10)$$

Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren ist vergleichsweise aufwendig, weil jeweils zu den vollen und zu den halben Zeitschritten die Berechnung der Gradienten für die Erhaltungsgleichungen (z. B. die Berechnung von  $\dot{\mathbf{v}}_n$  und  $\dot{\mathbf{v}}_{n+1/2}$ ) notwendig ist. Oft wird daher vereinfachend

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{v}}_{n+1/2} \\ \dot{e}_{n+1} &= \dot{e}_{n+1/2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

gesetzt. Das durch die Vereinfachung entstehende Schema ist stabil und genauer als das einfache Schema erster Ordnung. Eine Stabilitätsanalyse nach von Neumann findet sich zum Beispiel bei Balsara (1995); es wurde insbesondere in der SPH-Methode verwendet.

### 4.2.3 Leap-Frog Algorithmus

Der Leap-Frog Algorithmus ist wie das originale Prädiktor-Korrektor von einer Genauigkeit zweiter Ordnung. Grundidee ist es, die Variablen so auf der Zeitachse zu plazieren, daß Geschwindigkeiten immer zu den halben, Beschleunigungen und Koordinaten jedoch zu den vollen Zeitschritten berechnet werden. In der bei Balsara (1995) angegebenen Form werden Zwischenwerte für die Geschwindigkeit und die innere Energie berechnet (in den Gleichung durch Querbalken (  $\bar{\quad}$  ) gekennzeichnet), mit denen die Erhaltungsgleichungen ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_{n+1/2} \Delta t_n \\ \bar{\mathbf{v}}_{n+1} &= \mathbf{v}_{n+1/2} + \dot{\mathbf{v}}_n \frac{\Delta t_n}{2} \\ \bar{e}_{n+1} &= e_n + \dot{e}_n \Delta t_n \\ \mathbf{v}_{n+3/2} &= \mathbf{v}_{n+1/2} + \dot{\mathbf{v}}_{n+1} \Delta t_n \\ e_{n+1} &= e_n + (\dot{e}_{n+1} + \dot{e}_n) \frac{\Delta t_n}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Randles und Libersky schlugen 1996 ein vereinfachtes Schema für die Anwendung in der SPH-Methode vor:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1/2} &= \mathbf{v}_{n-1/2} + \dot{\mathbf{v}}_n \Delta t_n \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_{n+1/2} \Delta t_n \\ e_{n+1} &= e_n + \dot{e}_{n+1/2} \Delta t_n \end{aligned} \quad (4.13)$$

Allerdings sind auch bei diesem Schema Zwischenwerte zu ermitteln: die Berechnung der Beschleunigungen zum Zeitschritt  $n$  erfordert die Ermittlung der Spannungsgradienten zum

Zeitpunkt  $n$  sowie die Berechnung der Spannungen, ebenfalls zum Zeitschritt  $n$ . Die Spannungen wiederum sind zu berechnen unter Verwendung der Spannungsraten zum Zeitpunkt  $n-1/2$ , und für diese werden die Deformationsraten zum Zeitpunkt  $n-1/2$  benötigt. Die Deformationsraten kommen aus dem Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes zum Zeitpunkt  $n-1/2$ , und für die Berechnung der Gradienten müssen auch die Koordinaten bei  $n-1/2$  bekannt sein. Diese können linear interpoliert werden aus den Koordinaten bei  $n-1$  und  $n$ .

Das modifizierte Leap-Frog-Schema erfordert die Berechnung der Gradienten zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, zu  $t_n$  für die Beschleunigungsberechnung und zu  $t_{n+1/2}$  für die Geschwindigkeitsgradienten. Es bietet dafür eine Genauigkeit zweiter Ordnung und wurde sowohl in FE-Hydrocodes (vgl. Benson, 1992) als auch in SPH-Verfahren häufig verwendet (Randles & Libersky, 1996, Chen, Beraun & Jih, 1999). Es wird auch in der vorliegenden Arbeit benutzt.

### 4.3 Berechnungsablauf für ein explizites Verfahren mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung, Berechnung der inneren Energie

Die Umsetzung des vereinfachten Leap-Frog-Schemas in einen vollständigen Berechnungsablauf ist auf verschiedene Weisen möglich. Die in der Literatur angegebenen Abläufe sind jedoch meist stark vereinfacht. Daher wurde ein eigenes Ablaufschema für die Entwicklung des auf einer Kopplung der FE-Methode mit dem SPH-Verfahren basierenden Programmes entwickelt. Dieses Ablaufschema ist in Abbildung 4.1 so dargestellt, wie es im sequentiellen Programm realisiert wurde. Die Platzhalter der Variablen sind in der Reihenfolge ihrer Ermittlung numeriert, die Pfeile verdeutlichen den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Variablen. In der Abbildung 4.2 wurde zusätzlich das Vorgehen beim ersten Zeitschritt ( $t=0$ ) angegeben, weil es sich von den folgenden Zeitschritten etwas unterscheidet; denn im Ausgangszustand sind alle Variablen zum selben Zeitpunkt gegeben.

Entscheidend ist, daß in jedem Einzelschritt die benötigten Variablen rechtzeitig zur Verfügung stehen und die zeitliche Integration immer mit den richtigen Daten erfolgt: die Integration von  $n-1/2$  nach  $n+1/2$  mit der zeitlichen Ableitung zum Zeitpunkt  $n$  und die Integration von  $n$  nach  $n+1$  mit der zeitlichen Ableitung zum Zeitpunkt  $n+1/2$ .

Das Schema erfordert im Prinzip ein iteratives Vorgehen bei der Berechnung der inneren Energie  $e$ . Die Energierate  $e_{n+1/2}$  kann zunächst nur geschätzt werden, da die in der Energieerhaltungsgleichung benötigten Spannungen nur zum Zeitpunkt  $n$  bekannt sind. Werden die Spannungen aus den Werten  $\sigma_n$  und  $\sigma_{n+1}$  interpoliert, ist ein iteratives Vorgehen erforderlich, da der in den Spannungen enthaltene Druck  $p_{n+1}$  je nach EOS abhängig von der inneren Energie  $e_{n+1}$  sein kann. Für Zustandsgleichungen mit einer linearen Abhängigkeit des Druckes von der inneren Energie ist eine Formulierung möglich, in der die innere Energie mit dem Druck  $p_n$  und

den Dichten  $\rho_n$  und  $\rho_{n+1}$  berechnet werden kann (vgl. Benson, 1992).

Ein zusätzliches Problem tritt auf, da in der SPH-Methode die Energieratenberechnung im Rahmen einer räumlichen Approximation erfolgt, bei der die Deformationsraten des Zeitschrittes  $n+1/2$  mit Spannungen zu multiplizieren sind. Da zum Zeitpunkt der Berechnung der Deformationsrate die Spannungen zum Zeitpunkt  $n+1$  nicht bekannt sind, denn sie sind mit der Deformationsrate ja erst zu berechnen, kann die Energierate  $(de/dt)_{n+1/2}$  zunächst nur mit den Spannungen  $\sigma_n$  berechnet werden.

Beide Schwierigkeiten wurden gelöst, indem eine schrittweise Integration der Energie durchgeführt wird. Mit einer zunächst berechneten Energierate  $(de/dt)_{n+1/2}$  wird die Energie nur bis zum Zeitpunkt  $n+1/2$  integriert. Anschließend erfolgt die Berechnung des Druckes, der deviatorischen Spannungen und der künstlichen Viskosität zum Zeitschritt  $n+1$ . Mit diesen neuen Werten kann dann eine erneute Energieratenberechnung  $(de/dt)_{n+1/2}^+$  erfolgen, mit der die Energie  $e_{n+1}$  integriert wird.

#### 4.4 Globale Impuls- und Energieerhaltung

Die Betrachtung der globalen Impuls- und Energieerhaltung liefert ein wichtiges Instrument, die Güte einer numerischen Berechnung mit einem Hydrocode zu beurteilen. Die Diskretisierungsverfahren sind im allgemeinen so konzipiert, daß die lineare Impulserhaltung gewährleistet ist, die Drehimpulserhaltung wird dagegen bei Standard-SPH-Verfahren nicht eingehalten. Fehler in der linearen Impulserhaltung sind entweder echte Programmfehler oder weisen auf Probleme in einer Kontaktberechnung hin. Für die Kopplung zwischen Partikeln und Finiten Elementen bietet die Gesamtimpulserhaltung ebenfalls ein gutes Kontrollmittel. Mit der Anzahl FE-Knoten  $n_K$ , der Anzahl Partikel  $n_P$  und den in  $n_T$  Zeitschritten durch die Randbedingungen an  $n_B$  Randpunkten hinzugekommenen Impulsänderungen  $\Delta P_{TB}$  lautet die Forderung für die Erhaltung des linearen Impulses für einen Zeitschritt  $t_{n+1/2}$

$$\left( \sum_{K=0}^{n_K} m_K \mathbf{v}_K + \sum_{P=0}^{n_P} m_P \mathbf{v}_P \right)_{t=t_0} + \sum_{T=0}^{n_T} \sum_{B=0}^{n_B} \Delta P_{TB} = \left( \sum_{K=0}^{n_K} m_K \mathbf{v}_K + \sum_{P=0}^{n_P} m_P \mathbf{v}_P \right)_{t=t_{n+1/2}} \quad (4.14)$$

Die hier vektoriell formulierte Impulserhaltung ist für alle Raumrichtungen getrennt zu betrachten.

Geschwindigkeitsrandbedingungen werden berücksichtigt, indem die für einen Zeitschritt  $n+1/2$  berechnete Geschwindigkeit durch die vorgegebene Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_b$  ersetzt wird. Die dadurch bedingte Impulsänderung eines Knotens ist

$$\Delta P_{TB} = m(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{T+1/2}) \quad (4.15)$$



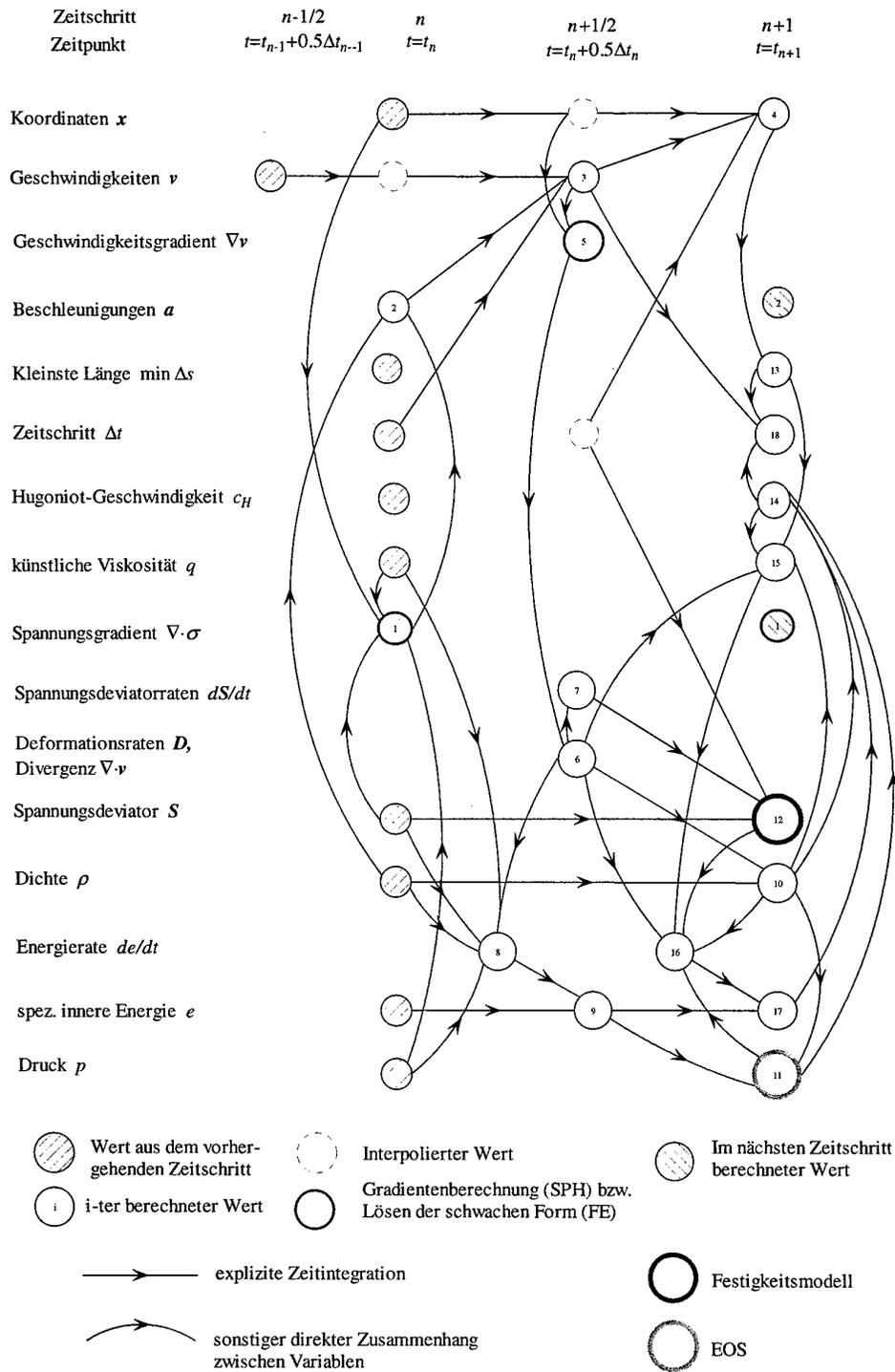


Abbildung 4.1: Zusammenhang der Variablen im Berechnungsablauf

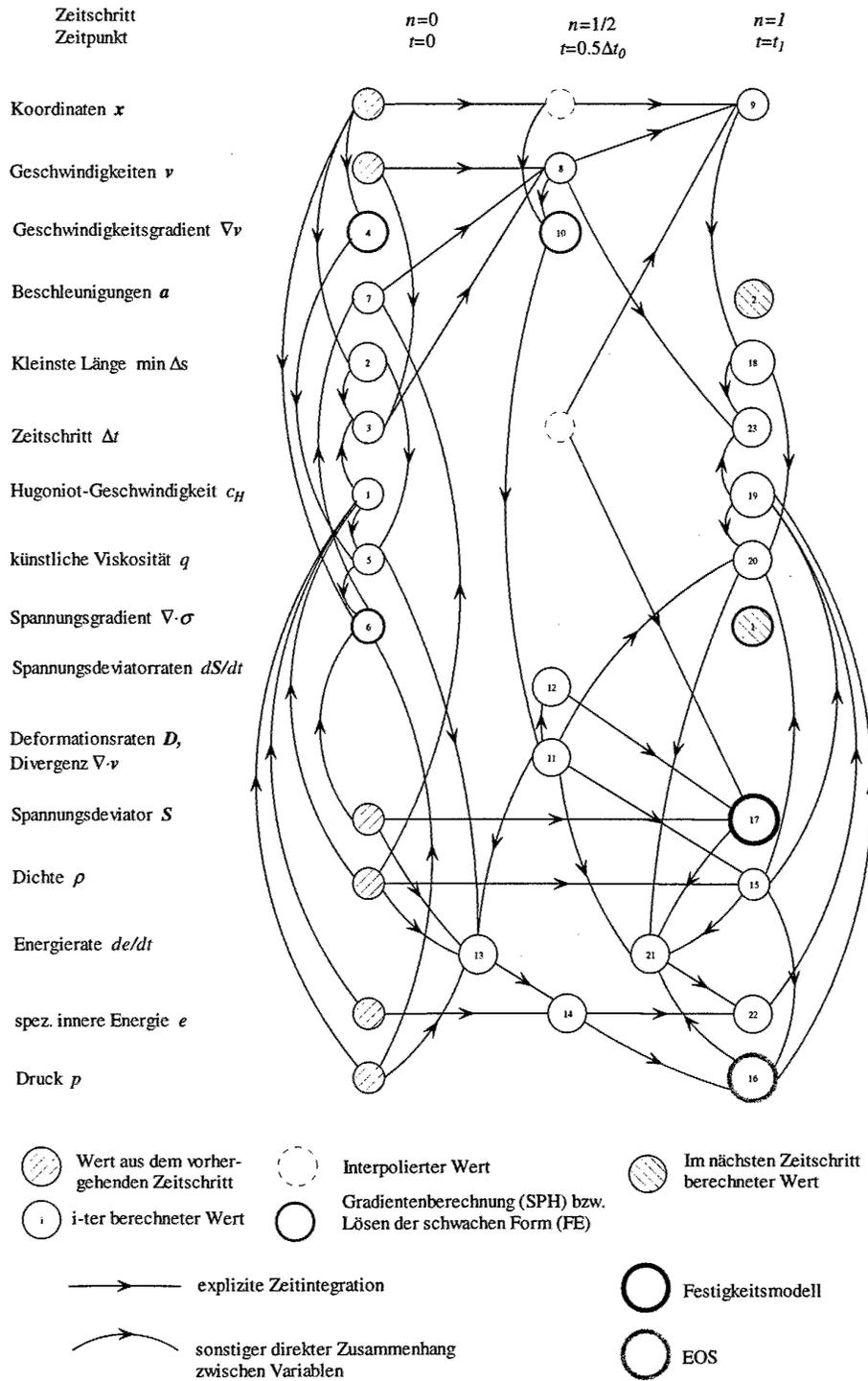


Abbildung 4.2: Zusammenhang der Variablen im Berechnungsablauf im ersten Zeitschritt

## 5. EIN FINITE-ELEMENTE-VERFAHREN FÜR IMPAKTVORGÄNGE

In diesem Kapitel erfolgt die Beschreibung zweier Elemente, die im Berechnungsprogramm implementiert und mit der SPH-Methode gekoppelt wurden: ein zweidimensionales, quadrilaterales Element und ein dreidimensionales Hexaederelement.

Ausgangspunkt der Elementformulierung ist die schwache Form der Impulserhaltungsgleichung aus Kapitel 3. Werden für die Ansatzfunktionen  $\Phi$  des Galerkin-Verfahrens die noch für die Elemente zu definierenden Formfunktionen  $N$  eingesetzt, lautet sie

$$\left[ \int_{\Omega} \rho N_J N_I d\Omega \right] a_J = - \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial N_I}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \rho f N_I d\Omega + \int_{\Gamma_\tau} \tau N_I d\Gamma_\tau + \sum_{k=1}^n f^*(X_k, t) N_I(X_k) \quad (5.1)$$

Die Volumenkräfte  $f$  (z.B. Gravitationskräfte) werden im folgenden nicht weiter betrachtet, da sie bei den betrachteten Impaktproblemen im allgemeinen keine Rolle spielen.

Der auf der linken Seite von Glg. 5.1 in eckigen Klammern stehende Term ist die sogenannte „konsistente Massenmatrix“. Bei der Herleitung der Gleichungen für die Elemente wird eine für die betrachteten Problemstellungen übliche Vereinfachung gemacht: anstelle der konsistenten wird eine reduzierte (engl. „lumped“) Massenmatrix verwendet. Bei der Berechnung der Beschleunigungen an den Knoten wird die eigentlich räumlich im Element verteilte Masse als Massepunkt am Ort der Knoten betrachtet, dabei wird die Masse eines Elementes gleichmäßig auf die zugehörigen Knoten verteilt. So läßt sich für jeden Knoten die Beschleunigung aus der Summe aller Kräfte auf den Knoten, geteilt durch dessen Masse, darstellen. Diese Kräfte kommen aus den Spannungen in den angrenzenden Elementen (1. Term auf der rechten Seite von Gleichung 5.1) und den äußeren Kräften auf den Knoten,  $f^*$ . Benson (1992) weist darauf hin, daß die reduzierte Massenmatrix nicht nur eine einfachere Berechnung ermöglicht, sondern auch für Impulsbelastung die geeignetere Formulierung darstellt. Die Knoten werden gewissermaßen entkoppelt. Wäre dies nicht der Fall, entstünden Oszillationen im gesamten zusammenhängenden Netz, sobald ein Knoten einer Beschleunigung unterliegt. Benson nennt die Untersuchung von Rank, Katz und Werner (1983), in der die Auswirkungen der Verwendung einer reduzierten Massenmatrix mathematisch analysiert werden. Durch die Verwendung der reduzierten Massenmatrix vereinfacht sich auch die Berechnung des Randintegrals in Glg. 5.1, Randspannungen können zu zusätzlichen Knotenkräften zusammengefaßt werden.

Die in dieser Arbeit verwendeten Elemente besitzen lineare Formfunktionen. Eine Vereinfach-

ung der Formulierung besteht in der Verwendung der in Kapitel 3 bereits angesprochenen reduzierten Integration. Die numerische Integration der schwachen Form erfolgt mit nur einem Integrationspunkt in der Mitte des Elementes, damit erhält man Elemente, auf denen die Spannung konstant ist („constant stress element“). Die verwendeten Verfahren für die Behandlung der entstehenden „Null-Energie-Moden“ werden in Abschnitt 2 dieses Kapitels behandelt.

## 5.1 Elementformulierungen

### 5.1.1 Quadrilaterales Element

Das verwendete quadrilaterale Element entspricht dem in Hydrocodes üblichen, wie es von Benson (1992) dargestellt wurde. Dort findet sich auch eine ausführliche Herleitung aus der schwachen Form. Die Verwendung der Ein-Punkt-Integration und der reduzierten Massenmatrix in Verbindung mit der expliziten Zeitintegration erlaubt eine Formulierung allein auf lokaler Element- bzw. Knotenebene, ohne daß Matrizen - wie etwa die sonst übliche Steifigkeitsmatrix - aufgestellt werden müßten.

Die folgende Abbildung zeigt das Element mit der gewählten Knotennummerierung und dem lokalen Koordinatensystem  $\xi_1, \xi_2$ .

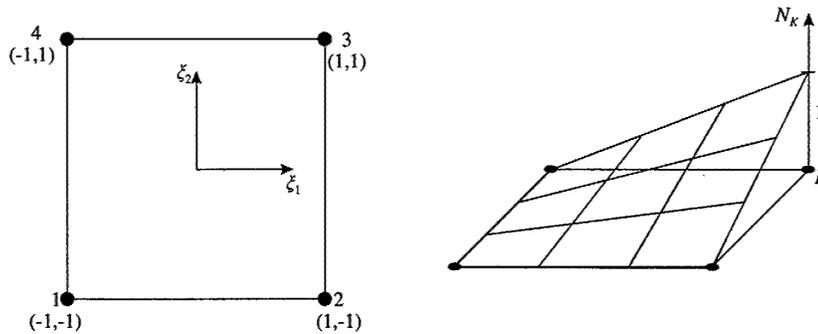


Abbildung 5.1: Quadrilaterales Element, lineare Formfunktion für den Knoten K

Die Formfunktionen für die vier Knoten werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Eine Elementformulierung wird einerseits benötigt zur Berechnung der Geschwindigkeitsableitungen in die Raumrichtungen und damit zur Berechnung des Deformationsratentensors

$D = \text{sym}(\nabla v)$ , mit dessen Hilfe wiederum Spannungsänderungen und Spannungen zu ermitteln sind. Die Herleitung erfolgt über den Approximationsansatz (vgl. Kapitel 3)

$$\nabla v = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \sum_{k=1}^{n_{en}} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} v_k \quad (5.3)$$

Die Terme  $\partial \xi / \partial x$  werden dabei aus der Inversion der Jacobi-Matrix bestimmt, deren Elemente durch

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{n_{en}} \frac{N_k(\xi)}{\partial \xi} x_k \quad (5.4)$$

gegeben sind. Die Deformationsraten (und entsprechend auch die Jacobi-Matrix) sind nur für den Spannungspunkt in Elementmitte ( $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ) zu berechnen. Für das quadrilaterale Element können die Geschwindigkeitsableitungen daher in kompakter Form angegeben werden, wobei  $A$  die Fläche des Elements ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{1}{2A} [(y_3 - y_1)(v_{x2} - v_{x4}) - (y_2 - y_4)(v_{x3} - v_{x1})] \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{1}{2A} [(x_2 - x_4)(v_{x3} - v_{x1}) - (x_3 - x_1)(v_{x2} - v_{x4})] \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{1}{2A} [(y_3 - y_1)(v_{y2} - v_{y4}) - (y_2 - y_4)(v_{y3} - v_{y1})] \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{1}{2A} [(x_2 - x_4)(v_{y3} - v_{y1}) - (x_3 - x_1)(v_{y2} - v_{y4})] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die zweite Aufgabe der Elementformulierung ist die Berechnung der Beschleunigungen der Knoten aus der schwachen Form der Impulserhaltungsgleichung. Für das vorliegende Element erfolgt eine elementweise Berechnung der Kräfte auf die Knoten. Durch Einsetzen der Formfunktionen in die schwache Form, Berechnung und Inversion der Jacobi-Matrix sowie Auswertung der Ein-Punkt-Integration ergeben sich die folgenden Ausdrücke für diese Kräfte (vgl. Abbildung 5.2):

$$\begin{aligned} F_{x3} = -F_{x1} &= \frac{1}{2} [(y_2 - y_4) \sigma_{xx} + (x_4 - x_2) \sigma_{xy}] \\ F_{x4} = -F_{x2} &= \frac{1}{2} [(y_3 - y_1) \sigma_{xx} + (x_1 - x_3) \sigma_{xy}] \\ F_{y3} = -F_{y1} &= \frac{1}{2} [(y_2 - y_4) \sigma_{xy} + (x_4 - x_2) \sigma_{yy}] \\ F_{y4} = -F_{y2} &= \frac{1}{2} [(y_3 - y_1) \sigma_{xy} + (x_1 - x_3) \sigma_{yy}] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Bei der Berechnung eines Zeitschrittes sind die Kräfte für jeden Knoten aus allen umliegenden Elementen zu addieren; die Division durch die Knotenmasse ergibt die Beschleunigung.

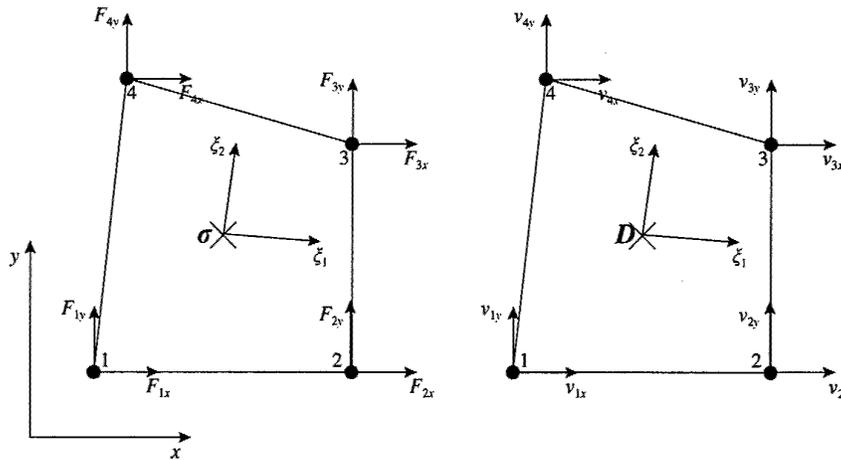


Abbildung 5.2: Spannung und Knotenkräfte; Knotengeschwindigkeiten und Deformationsrate

### 5.1.2 Hexaederelement

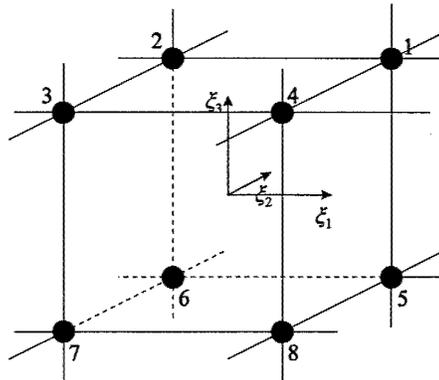


Abbildung 5.3: Hexaederelement mit lokalen Koordinaten und Knotennummerierung

Das in dieser Arbeit verwendete Hexaederelement besitzt ebenfalls nur einen Integrations- bzw. Spannungspunkt in der Elementmitte. Die linearen Formfunktionen für das dargestellte Hexaederelement mit der angegebenen Knotennummerierung lauten

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) & N_2 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) & N_4 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) & N_6 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) & N_8 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die für die Jacobi-Matrix benötigten Ableitungen der Formfunktionen können als Matrix der

Dimension  $8 \times 3$  (8 Formfunktionen, 3 Raumdimensionen) geschrieben werden:

$$\frac{\partial N_K}{\partial \xi_i} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} +(1+\xi_2)(1+\xi_3) & +(1+\xi_1)(1+\xi_3) & +(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ -(1+\xi_2)(1+\xi_3) & +(1-\xi_1)(1+\xi_3) & +(1-\xi_1)(1+\xi_2) \\ -(1-\xi_2)(1+\xi_3) & -(1-\xi_1)(1+\xi_3) & +(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ +(1-\xi_2)(1+\xi_3) & -(1+\xi_1)(1+\xi_3) & +(1+\xi_1)(1-\xi_2) \\ +(1+\xi_2)(1-\xi_3) & +(1+\xi_1)(1-\xi_3) & -(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ -(1+\xi_2)(1-\xi_3) & +(1-\xi_1)(1-\xi_3) & -(1-\xi_1)(1+\xi_2) \\ -(1-\xi_2)(1-\xi_3) & -(1-\xi_1)(1-\xi_3) & -(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ +(1-\xi_2)(1-\xi_3) & -(1+\xi_1)(1-\xi_3) & -(1+\xi_1)(1-\xi_2) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Wird diese Matrix in der Elementmitte - am Integrationspunkt - ausgewertet, ergibt sich

$$\frac{\partial N_K}{\partial \xi_i} (\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Die Elemente der  $(3 \times 3)$  Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  sind gegeben durch

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \sum_{K=1}^8 x_{Ki} \frac{N_K}{\partial \xi_j} \quad (5.10)$$

Die Inversion  $\mathbf{J}^{-1}$  liefert wieder die  $\partial \xi_i / \partial x_j$ . Anstelle der für das quadrilaterale Element noch kompakten expliziten Schreibweise für die Berechnung der Geschwindigkeitsableitungen wird im folgenden eine Formulierung in Matrixschreibweise angegeben. Die Berechnung gemäß

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \sum_{K=1}^8 v_{Ki} \frac{N_K}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \quad (5.11)$$

kann unter Verwendung einer Matrix  $\mathbf{B}$  auch geschrieben werden als

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{8} \sum_{K=1}^8 B_{Kijk} v_{Kk} \quad (5.12)$$

$\mathbf{B}$  ist hier die aus den Finite-Elemente-Verfahren für statische Berechnungen bekannte „Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix“. Ihre Elemente sind gegeben durch

$$B_{Kijk} = \begin{cases} \frac{N_K}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (5.13)$$

Die Matrix  $\mathbf{B}$  wird entsprechend verwendet für die Berechnung der Kräfte auf die Knoten des Elementes ( $V$  ist hier das Elementvolumen,  $V=8 \det \mathbf{J}$ )

$$F_{K_i} = -\frac{V}{8} B_{K_{ijk}} \sigma_{jk} = -\det \mathbf{J} B_{K_{ijk}} \sigma_{jk} \quad (5.14)$$

### 5.1.3 Innere Energie

Wie die Spannung wird bei den dargestellten „constant-stress“-Elementen auch die spezifische innere Energie im Element als konstant betrachtet. Die Änderung der spezifischen inneren Energie kann direkt aus der Energieerhaltungsgleichung

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sigma}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \quad (5.15)$$

berechnet werden, da alle Größen am Integrationspunkt bekannt und über das Element konstant sind. Im folgenden wird der Zusammenhang auch für die Gesamtenergie im Element dargestellt. Für ein Gebiet  $\Omega$  (Elementfläche bzw. -Volumen) sei zunächst die gesamte innere Energie  $E_\Omega$  betrachtet, wobei  $M_\Omega$  die Gesamtmasse im Element ist:

$$E_\Omega = \int_\Omega \rho e d\Omega = e M_\Omega \quad (5.16)$$

Da die Elementmasse konstant ist, ist die Energieänderungsrate („Energierate“) im Element

$$\frac{dE_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} (e M_\Omega) = M_\Omega \frac{de}{dt} \quad (5.17)$$

Wird nun die Energieerhaltungsgleichung für  $de/dt$  eingesetzt, läßt sich, da Dichte, Spannungen und Geschwindigkeitsgradient im Element konstant sind, für die Energieerhaltung im Element schreiben:

$$\frac{dE_\Omega}{dt} = M_\Omega \frac{\sigma}{\rho} : \nabla \mathbf{v} = \left( \int_\Omega \rho d\Omega \right) \left( \frac{\sigma}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \left( \int_\Omega 1 d\Omega \right) \left( \frac{\sigma}{\rho} : \nabla \mathbf{v} \right) \quad (5.18)$$

Mit  $V_\Omega$  für das Elementvolumen, bzw. die Elementfläche, ergibt sich für die Änderung der Gesamtenergie im Element

$$\frac{dE_\Omega}{dt} = \sigma : \nabla \mathbf{v} V_\Omega \quad (5.19)$$

## 5.2 Hourglass-Viskosität

Das „Hourglass“-Problem wird am Beispiel des zweidimensionalen, quadrilateralen Elements mit einem Integrationspunkt erläutert. Dieses Element besitzt 8 Freiheitsgrade, die jeweils 2 Bewegungsrichtungen der 4 Knoten. Aus diesen sind die Elementspannungen zu berechnen. Werden die 8 Freiheitsgrade mit der Anzahl möglicher Bewegungsmodi des Elementes verglichen, so bleiben nach Abzug der drei Starrkörperbewegungen Rotation und Translation in die beiden Koordinatenrichtungen noch fünf Modi übrig. Im Zweidimensionalen gibt es jedoch

nur 3 unabhängige Spannungen ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ), die durch die Knotenverschiebungen hervorgerufen werden können. Es verbleiben also zwei Modi, durch die keine Spannungen erzeugt werden. Diese als "Null-Energie-Moden" bezeichneten Modi sind die Bewegungen der Knoten, bei denen die Länge der Diagonalen konstant bleibt. Dies ist bei genauerer Betrachtung auch direkt aus den Gleichungen 5.5 für die Ableitungen der Geschwindigkeit, aus denen Deformationsraten und dann die Spannungen berechnet werden, zu erkennen. Dieser Effekt ist auf den zu geringen Ansatzgrad der numerischen Integration (nur ein Integrationspunkt bei linearer Verteilung von Geschwindigkeiten, Dehnungen etc.) zurückzuführen.

Im Verlaufe einer Berechnung können diese Elementverzerrungen quasi unbegrenzt wachsen, wenn keine Kräfte eingefügt werden, die dieser Bewegung entgegenstehen. Das Verfahren, derartige Kräfte einzufügen, wird auch "Hourglass" - Viskosität genannt, da die zusätzlichen Kräfte diese Bewegungen, die zu einem sanduhrartigen Aussehen zweier nebeneinanderliegender Elemente führen, verhindern.

Ein einfaches Verfahren, derartige Kräfte zu berechnen, ist der auch in AUTODYN (Century Dynamics, 1999) für ein zweidimensionales Finite-Differenzen-Verfahren implementierte Algorithmus, der im folgenden dargestellt wird.

Zunächst werden zwei Relativgeschwindigkeiten in  $x$ - und  $y$ -Richtung berechnet, die sich unmittelbar auf die Größe der betreffenden Modi beziehen:

$$\begin{aligned} v_{Rx} &= v_{x1} - v_{x2} + v_{x3} - v_{x4} \\ v_{Ry} &= v_{y1} - v_{y2} + v_{y3} - v_{y4} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aus diesen werden dann, abhängig von einer zu wählenden Konstanten  $C_H$  (zwischen 0 u. 1, meist ca. 0.05), Korrekturkräfte ermittelt, die die Steifigkeit des Elements erhöhen, so daß die entsprechenden Modi nicht auftreten.

$$\begin{aligned} F_{x2} = F_{x4} = -F_{x3} = -F_{x1} &= -\frac{C_H m v_{Rx}}{16\Delta t} \\ F_{y2} = F_{y4} = -F_{y3} = -F_{y1} &= -\frac{C_H m v_{Ry}}{16\Delta t} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Für das dreidimensionale Hexaederelement wird eine Formulierung übernommen, die ursprünglich aus dem FE-Programm DYNA3D stammt. Zunächst werden Geschwindigkeitsvektoren berechnet, aus denen sich dann die Hourglass-Modi zusammensetzen lassen:

$$\begin{aligned} v_A &= v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 + v_7 - v_8 \\ v_B &= v_1 - v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 + v_7 - v_8 \\ v_C &= v_1 + v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 + v_7 + v_8 \\ v_D &= v_1 - v_2 + v_3 - v_4 - v_5 + v_6 - v_7 + v_8 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Für jedes Element wird ein Korrekturfaktor

$$A_H = C_H \rho c V^{\frac{2}{3}} \quad (5.23)$$

berechnet, mit dem die zusätzlichen Kraftvektoren auf die Knoten bestimmt werden:

$$F_1 = -A_H(+v_A + v_B + v_C + v_D)$$

$$F_2 = -A_H(-v_A - v_B + v_C - v_D)$$

$$F_3 = -A_H(+v_A - v_B - v_C + v_D)$$

$$F_4 = -A_H(-v_A + v_B - v_C - v_D)$$

$$F_5 = -A_H(+v_A - v_B - v_C - v_D)$$

$$F_6 = -A_H(-v_A + v_B - v_C + v_D)$$

$$F_7 = -A_H(+v_A + v_B + v_C - v_D)$$

$$F_8 = -A_H(-v_A - v_B + v_C + v_D)$$

Diese Kräfte sollen die hochfrequenten Hourglass-Oszillationen dämpfen und gleichzeitig einen möglichst geringen Effekt auf niederfrequente, globale Deformationen haben, aus diesem Grunde wird in  $A_H$  die lokale Schallgeschwindigkeit  $c$  berücksichtigt.

Die dargestellten Formulierungen zur Kontrolle der Hourglass-Modi sind einfach zu implementieren und verlangen einen vergleichsweise geringen Berechnungsaufwand, sie werden daher in dieser Arbeit verwendet. Belytschko & Liu (1983) weisen jedoch darauf hin, daß sie streng genommen nur für unverzerrte, rechtwinklige Elemente mit gleich langen Seiten gelten. Sind diese Bedingungen nicht mehr gegeben, besteht ein aus Elementen mit der gezeigten Hourglass-Korrektur bestehendes Netz den sogenannten „Patch-Test“ nicht mehr, das heißt, ein lineares, in einer Berechnung als Randbedingung aufgebrachtes Verschiebungsfeld führt nicht mehr zu dem zugehörigen linearen Verschiebungsfeld innerhalb des Netzes. Flanagan & Belytschko (1981) stellten ein Verfahren für die Hourglass-Kontrolle vor, das auch die Elementgeometrie berücksichtigt. Es basiert auf der Zerlegung der Approximation des Geschwindigkeitsfeldes in unabhängige Vektoren, von denen zwei, die „Hourglass-Vektoren“, orthogonal zu den übrigen sechs sind und im constant-stress-Element keinen Beitrag zum Deformationsratentensor liefern. Sie stellten darüber hinaus fest, daß eine „viskose“, also von Geschwindigkeitsdifferenzen abhängige Formulierung (wie die hier gewählte), nicht in der Lage ist, die Hourglass-Modi vollständig zu dämpfen, vielmehr treten immer Hourglass-Verformungen auf, weil das Element keine Steifigkeit gegenüber diesen Modi besitzt. Eine auf der Steifigkeit basierende Formulierung besitzt diesen Nachteil nicht.

### 5.3 Randbedingungen

Die Berücksichtigung elementarer (Kraft- oder Geschwindigkeits-) Randbedingungen kann in einem expliziten FE-Verfahren mit den hier verwendeten Elementen auf einfache Weise geschehen. Entscheidend ist, an welcher Stelle innerhalb der Berechnung eines Zeitschrittes die Randbedingungen gesetzt werden. Der prinzipielle Ablauf ist (vgl. Kapitel 4)

1. Berechnung der Zeitschrittlänge
2. Berechnung der Knotenkräfte aus den Elementspannungen
3. *Addition der Kräfte aus Kraft- bzw. Spannungsrandbedingungen auf die Knoten*
4. Berechnung der Beschleunigungen der Knoten
5. Integration der Geschwindigkeiten für Knoten ohne Geschwindigkeitsrandbedingung
6. *Setzen der Knotengeschwindigkeiten auf die aus Randbedingungen vorgegebenen Werte*
7. Integration der Knotenkoordinaten aus Knotengeschwindigkeiten
8. Berechnung der Deformationsraten
9. Berechnung des neuen Spannungszustands mit Hilfe des Materialmodells
10. Starten des nächsten Zeitschrittes

Ein vorgegebener Druck als Randbedingung auf quadrilaterale (zweidimensionale Elemente) kann in Kräfte auf die Knoten umgerechnet werden (Abbildung 5.4). Hierzu sind zunächst Normalenvektoren  $\mathbf{n}$  auf die benachbarten Elementseiten zu berechnen. Die Kraft auf den Knoten ergibt sich dann aus der Summe der beiden Kräfte auf die Elementseiten, diese wiederum aus dem Produkt aus Normalenvektor, Druck  $p$  und der halben Länge  $l$  der betreffenden Elementseite. Die Kraft auf den Knoten  $k_2$  ist also beispielsweise

$$\mathbf{F}_2 = \frac{l_{12}}{2}(-p \mathbf{n}_{k_1 k_2}) + \frac{l_{23}}{2}(-p \mathbf{n}_{k_2 k_3}) \quad (5.24)$$

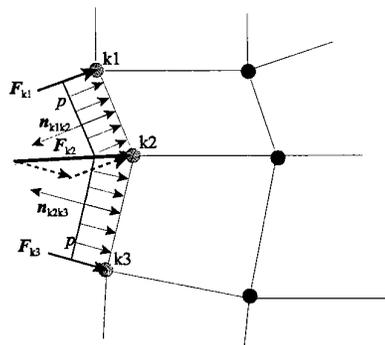


Abbildung 5.4: Berechnung von Knotenkräften aus Druckrandbedingung an den Knoten  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$

## 5.4 Bestimmung des Randes für quadrilaterale Elemente

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Verfahren der Kopplung von Finiten Elementen mit Partikeln untersucht. Bei einigen dieser Verfahren ist die Kenntnis des Randes eines mit Finiten Elementen diskretisierten Gebietes notwendig, insbesondere für die noch zu beschreibenden Kontaktalgorithmen. Letztere werden nicht nur für die Kopplung mit Partikeln, sondern auch für den Kontakt zwischen Finiten Elementen angewandt. Der Rand eines mit Finiten Elementen diskretisierten Gebietes ist im zweidimensionalen Fall eine Linie, die sich als Linienzug aus den Kanten am Rand liegender Elemente ergibt. Im dreidimensionalen Fall bilden die Oberflächen der außen liegenden Elemente die Randfläche. Die adaptive Umwandlung von Elementen in Partikeln erfordert für Kopplungsverfahren, die den Rand benötigen, dessen laufende Aktualisierung.

Um verschiedene Kopplungsalgorithmen vergleichen zu können, wird im folgenden eine Methode zur adaptiven Bestimmung des Randes eines FE-Netzes für zweidimensionale Berechnungen mit quadrilateralen Elementen eingeführt. Auf eine Bestimmung des Randes für dreidimensionale Berechnungen wird in der vorliegenden Arbeit verzichtet, da die prinzipielle Funktionalität der Kontakt- und Kopplungsalgorithmen in zweidimensionalen Berechnungen ausreichend untersucht und dargestellt werden kann. Für die Kopplung von Partikeln mit Elementen wird in Kapitel 7 ein Algorithmus vorgestellt werden, der für dreidimensionale Berechnungen geeignet ist und keine Bestimmung des Randes erfordert.

Der Rand wird während der Rechnung als Randknotenliste in Form einer Liste von „Zeigern auf Knoten“ gespeichert. Da in einem FE-Gebiet mehrere Ränder - ein äußerer und mehrere innere Ränder - vorhanden sein können, gehört zu jedem Gebiet eine „Liste von Randknotenlisten“. Für die Randbestimmung wesentlich sind die beiden folgenden Merkmale der im Programm implementierten Datenstruktur:

- Jeder Knoten kennt die Anzahl der Elemente, zu denen er gehört (besitzt Zeiger auf diese Elemente) und eine Methode, die Anzahl Elemente, die es mit einem angegebenen Knoten gemein hat (0, 1 oder 2), zu ermitteln.
- Jedes Element kennt (besitzt Zeiger auf) seine vier Knoten.

Der Algorithmus läuft in folgenden Schritten ab:

1. Zunächst werden Zeiger auf alle Knoten, die von weniger als 4 Elementen benutzt werden - also alle Randknoten -, in einer Liste gespeichert.
2. Zum ersten Knoten in der Liste wird ein zum selben Element gehörender benachbarter Knoten gesucht, der mit dem ersten Knoten genau ein Element gemein hat, damit ist das erste Randsegment gefunden.
3. Die Richtung des Segments wird überprüft: falls sie nicht mit der Umlaufrichtung des Elements übereinstimmt, werden die beiden Zeiger auf die Knoten vertauscht.

4. Eine neue Randknotenliste wird erstellt, die Zeiger auf die beiden bekannten Knoten sind die ersten Listenelemente.
5. Für das letzte Listenelement (zunächst der zweite Knoten des Segments) wird überprüft, ob der auf dem Element im Umlaufsinn nächste Knoten ebenfalls ein Randknoten ist. Wenn ja, wird ein Zeiger auf diesen als nächstes Listenelement gespeichert. Wenn nicht, werden der Reihe nach die Elemente, die den Knoten benutzen, daraufhin überprüft, ob der auf den betrachteten Knoten im Umlaufsinn folgende ein Randknoten ist bzw. ob der nachfolgende Knoten mit dem betrachteten Knoten nur dieses eine Element gemein hat. Dies wird solange durchgeführt, bis der nächste Randknoten gefunden ist und als Listenelement gespeichert werden kann.
6. Schritt 5. wird solange fortgeführt, bis der nächste gefundene Randknoten wieder der erste in der Liste ist, bis also der Rand geschlossen ist.
7. Die jetzt einem bestimmten Rand zugeordneten Randknoten werden aus der Liste aller Randknoten gelöscht.
8. Falls noch Zeiger auf Randknoten in der Liste aller Randknoten sind, wird wieder bei Schritt 2. begonnen.

Diese Verfahren deckt auch Sonderfälle des Randverlaufs, wie die in der Abbildung 5.5 dargestellten, ab.

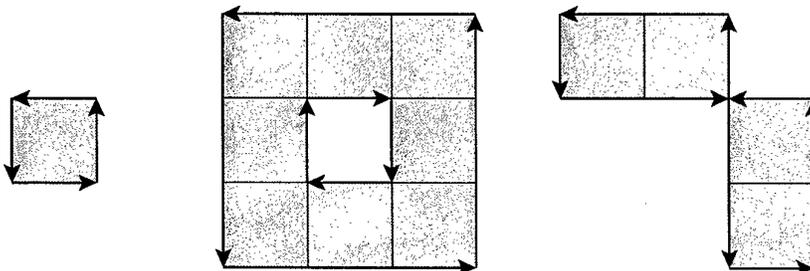


Abbildung 5.5: Mögliche Randverläufe bei quadrilateralen Elementen

## 5.5 Kontaktalgorithmus für quadrilaterale Elemente

Die Formulierung der quadrilateralen Elemente wurde ergänzt um einen Kontaktalgorithmus, mit dem zweidimensionale Kontaktprobleme gelöst werden können. In Abschnitt 7.1.1 wird eine Erweiterung dieses Algorithmus für die Kopplung von Elementen mit Partikeln beschrieben.

Der Kontaktalgorithmus basiert auf dem in FE-Programmen verwendeten „Master-Slave“-Konzept. Eine Oberfläche - der Rand eines Netzes - ist dabei die Master-Fläche. Mit der Master-Fläche in Kontakt tretende Knoten, die Slave-Knoten, erfahren eine Kontaktkraft, die so

berechnet wird, daß im betrachteten Zeitschritt keine Durchdringung der Master-Fläche stattfindet, die Gegenkraft zu dieser Kontaktkraft wird als Reaktionskraft auf die betreffenden Knoten der Master-Fläche aufgebracht.

Ein Verbesserung des Master-Slave-Verfahrens besteht in der Verwendung einer Hülle (oder „Gap“) um die Master-Oberfläche (Thoma & Vinckier, 1994). Diese Hülle, deren Dicke vom Benutzer unter Berücksichtigung der Netzgeometrie festzulegen ist, erlaubt eine geometrisch eindeutige Bestimmung der Kontaktkräfte, wie sie insbesondere an Ecken nicht gegeben ist, wenn nur das Durchdringen der Master-Oberfläche als Kriterium betrachtet wird. Ein Knoten, der in die Hülle eines Elementes eindringt, erfährt eine Kontaktkraft, die so groß ist, daß er in diesem Zeitschritt außerhalb der Hülle bleibt.

Vor der Berechnung der Kontaktkraft ist festzustellen, ob die Kontaktbedingung erfüllt ist, ob also ein Knoten in die Hülle eines Elementes eingedrungen ist. Dabei sind mehrere Fälle zu unterscheiden (Abb. 5.6).

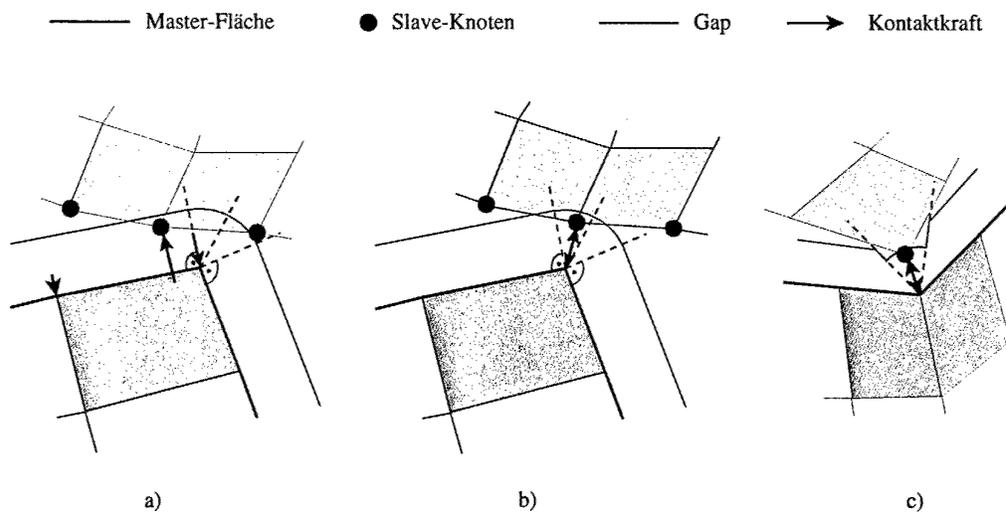


Abbildung 5.6: Verschiedene Fälle für die Kontaktberechnung mit dem „Gap“-Algorithmus

In Fall a) wird eine Kraft auf den Slave-Knoten berechnet, die Kraft auf die Master-Fläche wird auf die zwei Knoten des Segmentes aufgeteilt. Die Bezeichnungen sind der folgenden Abbildung zu entnehmen.

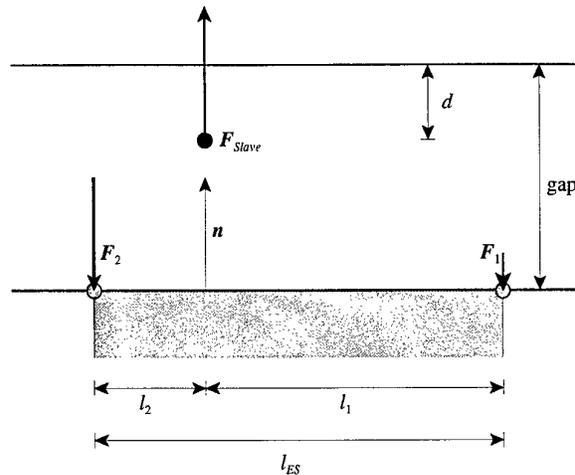


Abbildung 5.7: Geometrische Bezeichnungen für die Kontaktberechnung im Fall a)

Die Überprüfung, ob Kontakt vorliegt, geschieht mit Hilfe des Normalenvektors auf die Elementseite. Ist der Abstand des Slave-Knotens von der Elementseite kleiner als die Dicke der Hülle (gap), sind Kontaktkräfte zu berechnen. Zunächst wird eine fiktive, mittlere Masse für das Master-Segment berechnet:

$$m_{Master} = \frac{l_1}{l_{ES}} m_2 + \frac{l_2}{l_{ES}} m_1 \quad (5.25)$$

Der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  für den Slave-Knoten wird so ermittelt, daß am Ende des betrachteten Zeitschrittes der Knoten wieder außerhalb der Hülle liegt, dabei wird durch das Massenverhältnis die Beschleunigung der Master-Knoten implizit mit berücksichtigt:

$$\mathbf{a}_{Slave} = \mathbf{n} \frac{d}{(\Delta t)^2} \frac{m_{Master}}{m_{Master} + m_{Slave}} \quad (5.26)$$

Der zugehörige Kraftvektor ist dann

$$\mathbf{F}_{Slave} = m_{Slave} \mathbf{a}_{Slave} \quad (5.27)$$

Die Reaktionskräfte auf die Knoten des Master-Segments werden berechnet zu

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_{Slave} \frac{l_2}{l_{ES}} \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_{Slave} \frac{l_1}{l_{ES}} \quad (5.28)$$

Die Berechnung der Kontaktkraft für die Fälle b) und c) in Abbildung 5.6 läuft wie im Fall a) ab, mit dem Unterschied, daß der Kontakt mit nur einem Master-Knoten stattfindet und der Normalenvektor durch einen auf die Länge 1 normierten Verbindungsvektor zwischen dem Master-Knoten und dem Slave-Knoten zu ersetzen ist.

Für die Kontaktberechnung spielt es eine entscheidende Rolle, welches der in Kontakt tretenden Netze „Master“ und welches „Slave“ ist, da sich hierdurch eine andere Verteilung der

Kontaktkraft ergeben kann. Eine günstige Wahl kann im allgemeinen nicht a priori getroffen werden. Daher wird jedes Teilnetz einmal als „Master“ betrachtet und der Kontakt mit möglichen „Slave-Knoten“ anderer Teilnetze überprüft. Die berechneten Kontaktkräfte werden dabei jeweils nur zur Hälfte angerechnet. Hierdurch wird die Symmetrie der Kontaktberechnung entscheidend verbessert.

Das geschilderte Verfahren hat Konsequenzen für die Wahl der Zeitschrittlänge: der Zeitschritt muß mindestens so begrenzt werden, daß innerhalb des Zeitschrittes kein Knoten eine Strecke, die größer als die Dicke der Hülle ist, zurücklegt. In der Praxis wird bei der Bestimmung der Zeitschrittweite nur mit der Hälfte oder einem Drittel der Hülldicke gerechnet, um nicht zu große Kontaktkräfte zu erhalten.

In verschiedenen, mit dem implementierten Verfahren durchgeführten Testrechnungen hat sich gezeigt, daß der Zeitschritt größer gewählt werden kann, wenn für die Kontaktberechnung zunächst fiktive Koordinaten (ohne Kontakt) des nächsten Zeitschrittes berechnet und für die Ermittlung der Abstände und Längen verwendet werden. Wird mit den Koordinaten des aktuellen Zeitschrittes gerechnet, ist der Zeitschritt kleiner zu wählen, um künstliche Oszillationen gering zu halten.

## 6. NETZFREIES BERECHNUNGSVERFAHREN FÜR IMPAKTVORGÄNGE

In Kapitel 3 wurden bereits einige Grundlagen netzfreier Verfahren erläutert und die wesentlichen Merkmale verschiedener, derzeit in der Entwicklung befindlicher Verfahren vorgestellt. Hier soll nun das mit der FE-Methode zu koppelnde SPH-Verfahren eingehender beschrieben werden.

### 6.1 Die SPH -Methode

#### 6.1.1 Approximationsverfahren

Die SPH-Methode wurde zuerst von Lucy (1977) und Gingold & Monaghan (1977) vorgestellt. Gingold & Monaghan (1982) lieferten eine mathematische Basis für die SPH-Methode durch die Verwendung einer glättenden („smoothing“) Funktion, auch „Kernel-Funktion“ genannt, zur Erzeugung einer Approximation. Diese Kernel-Funktion ist nur in einer begrenzten Umgebung  $\Omega_I$  eines betrachteten Punktes  $\mathbf{x}_I$  ungleich 0. Die kontinuierliche Variante der Kernel-Approximation stellt die Grundlage für den bereits in Kapitel 3 erwähnten diskreten Approximationsansatz dar. Die Kernel-Approximation eines Funktionswertes  $u^h$  an einer Stelle  $\mathbf{x}_I$  lautet:

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) u(\mathbf{x}) d\Omega_I \quad (6.1)$$

Die Kernel-Funktion  $W$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Ihr Unterstützungsbereich ist begrenzt durch den Approximationsradius  $2h$ :

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) = 0 \text{ für } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I| > 2h \quad (6.2)$$

- Sie ist in Abhängigkeit von  $h$  so zu normieren, daß gilt:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) d\Omega_I = 1 \quad (6.3)$$

- Sie ist symmetrisch zur betrachteten Stelle  $\mathbf{x}_I$ :

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) = -W(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}, h) \quad (6.4)$$

- $W(r, h)$  ist eine monoton abnehmende Funktion ( $r$  sei hier der Abstand  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$ )

Oft wird als weitere Bedingung angegeben, daß  $W(r, h) \rightarrow \delta(r)$  für  $h \rightarrow 0$ , wobei  $\delta(r)$  die Diracsche Delta-Funktion ist. Diese gesonderte Bedingung erscheint jedoch unnötig, da es wohl keine praktisch verwendbare Funktion gibt, die die genannten vier Bedingungen erfüllt und für  $h \rightarrow 0$  nicht zur Delta-Funktion wird; im übrigen wird in praktischen Berechnungen  $h$  auch nie Null (vgl. Belytschko et al., 1996).

Die Integration von 6.1 wird approximiert durch eine Summation über diskrete Werte an  $n$  gegebenen Nachbarpunkten von  $\mathbf{x}_I$ :

$$u^h(\mathbf{x}_I) \cong \sum_{J=1}^n W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) u(\mathbf{x}_J) \Delta V_J \quad (6.5)$$

Jedem Nachbarpunkt  $\mathbf{x}_J$  wird dabei ein zugehöriges Volumen  $\Delta V_J$  zugeordnet.

Die am häufigsten benutzte Kernel-Funktion ist der kubische Spline. Er hat den Vorteil, daß bei regelmäßiger Anordnung aller Punkte eine lineare Funktion exakt approximiert wird (vgl. Dilts, 1999), dies ist für andere mögliche Kernel-Funktionen, beispielsweise Gauß-Verteilungsfunktionen, nicht der Fall. In der folgenden Gleichung ist  $D$  die Anzahl der betrachteten Raumdimensionen,  $r$  ist der Abstand zwischen den zwei Punkten  $|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I|$ , der Unterstützungsbereich hat den Radius  $r_{\max} = 2h$ .

$$W = \frac{C}{h^D} \begin{cases} \left(1 - 1.5 \frac{r^2}{h^2} + 0.75 \frac{r^3}{h^3}\right) & 0 \leq \frac{r}{h} < 1 \\ \left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 & 1 \leq \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \frac{r}{h} > 2 \end{cases} \quad D = \begin{cases} 1: & C = \frac{2}{3} \\ 2: & C = \frac{10}{7\pi} \\ 3: & C = \frac{1}{\pi} \end{cases} \quad (6.6)$$

Die Approximation von Gradienten, wie sie für die Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen benötigt wird, geht zunächst wieder von der kontinuierlichen Form aus:

$$\nabla u^h(\mathbf{x}_I) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) \nabla u(\mathbf{x}) d\Omega_I \quad (6.7)$$

Eine partielle Integration und die Anwendung des Divergenztheorems liefern

$$\nabla u^h(\mathbf{x}_I) = \int_{\Gamma} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) u(\mathbf{x}) \mathbf{n} d\Gamma_I - \int_{\Omega} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) u(\mathbf{x}) d\Omega_I \quad (6.8)$$

Das Oberflächenintegral wird vernachlässigt, dies schränkt die Gültigkeit der Gleichung auf Fälle ein, in denen innerhalb des Unterstützungsbereiches keine Randbedingungen zu berücksichtigen sind, so daß auf  $\Gamma$  entweder  $W$  oder  $u$  Null ist. Die zugehörige diskrete Approximation lautet dann

$$\nabla u^h(\mathbf{x}_I) \cong - \sum_{J=1}^n \nabla W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) u(\mathbf{x}_J) \Delta V_J \quad (6.9)$$

Der bei der Bestimmung des Wertes der Kernel-Funktion vorkommende Radius  $r$  läßt sich berechnen nach  $r = \sqrt{x_i x_i}$ . Der Gradient der Kernel-Funktion ist dann

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h)}{\partial x_i} = \frac{\partial W(r, h)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial W(r, h)}{\partial r} \frac{x_i}{r} \quad (6.10)$$

Der Funktionswert am betrachteten Punkt selbst spielt keine Rolle bei der Approximation eines Gradienten in 6.9, da der Gradient der Kernel-Funktion für  $\mathbf{x}_J = \mathbf{x}_I$  (also  $r=0$ ) null ist.

Aus den Anforderungen an die Kernel-Funktion ergeben sich zwei näherungsweise erfüllte Gleichungen, die eine wichtige Rolle bei der Formulierung der Erhaltungsgleichungen in der SPH-Form spielen. Die erste Gleichung ist dabei die diskrete Form der sogenannten Konsistenzbedingung nullter Ordnung (vgl. Glg. 6.3); sie stellt sicher, daß eine konstante Funktion richtig approximiert wird:

$$\sum_{J=1}^n W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) \Delta V_J \cong 1 \quad (6.11)$$

$$\sum_{J=1}^n \nabla W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) \Delta V_J \cong 0 \quad (6.12)$$

Beide Gleichungen sind jedoch nur näherungsweise erfüllt, insbesondere an Rändern und bei unregelmäßiger Partikelanordnung kann die Näherung mangelhaft sein. Die 2. Gleichung kann jedoch genutzt werden, um eine Verbesserung der SPH-Näherung 6.9 für den Fall zu erhalten, daß ein Partikel nur auf einer Seite Nachbarn hat. Belytschko et al. (1998) sprechen hier von einer „Symmetrisierung“. Eine derartige Formulierung wird in praktisch allen SPH-Programmen benutzt, sie kann erzeugt werden durch die Addition eines Produkts aus dem „Null-Gradienten“ (Gleichung 6.12) und dem Funktionswert  $u_j$ :

$$\begin{aligned} \nabla u^h(\mathbf{x}_I) &\cong - \sum_{J=1}^n \nabla W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) u(\mathbf{x}_J) \Delta V_J + u(\mathbf{x}_I) \sum_{J=1}^n \nabla W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) \Delta V_J \\ \nabla u^h(\mathbf{x}_I) &\cong - \sum_{J=1}^n \nabla W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) (u(\mathbf{x}_J) - u(\mathbf{x}_I)) \Delta V_J \end{aligned} \quad (6.13)$$

Diese Form hat gegenüber 6.9 den Vorteil, daß für konstante  $u(\mathbf{x})$  der Gradienten wegen  $u_I = u_J$  tatsächlich überall 0 ist, dies ist in der ursprünglichen Form - insbesondere wenn das Partikel am Rand eines Gebietes liegt oder die Partikel unregelmäßig verteilt sind - nicht der Fall. Das Verfahren 6.13 ist damit „vollständig von nullter Ordnung“ (vgl. Kapitel 3), das heißt, es ist in der Lage, unabhängig von der Anordnung der Partikel die Ableitung einer konstanten Funktion exakt zu reproduzieren.

Eine andere Möglichkeit, die Approximation 6.9 zu verändern, ist die Subtraktion eines Produkts aus dem „Null-Gradienten“ (Gleichung 6.12) und dem Funktionswert  $u_j$ :

$$\nabla u^h(\mathbf{x}_I) \cong - \sum_{J=1}^n \nabla W(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I, h) (u(\mathbf{x}_J) + u(\mathbf{x}_I)) \Delta V_J \quad (6.14)$$

Diese Form erzeugt eine symmetrische Wechselwirkung zwischen den Partikeln, das heißt, der Beitrag des Partikels  $J$  zum Gradienten an der Stelle des Partikels  $I$  ist genau so groß wie der Beitrag von  $I$  zum Gradienten bei  $J$ . Dadurch lassen sich bei der Diskretisierung der Impulserhaltungsgleichung die Beiträge als symmetrische Kräfte zwischen den Partikeln berechnen, und die Erhaltung des linearen Impulses ist gewährleistet. An einem Rand führt die Korrektur 6.14 wegen der Nichterfüllung von 6.12 zur Berechnung eines Gradienten  $\neq 0$ , wenn alle  $u$  konstant sind. Dies kann durchaus erwünscht sein, wenn ein konstantes Spannungsfeld im

Inneren eines Körpers zur Beschleunigung eines am Rand gelegenen Partikels führen soll. Auf diese Weise wird in der Standardform der SPH Methode der „freie Rand“ realisiert.

### 6.1.2 SPH-Formulierung der Erhaltungsgleichungen

Werden die gezeigten diskreten Approximationen auf die Erhaltungsgleichungen und die Berechnung der Geschwindigkeitsgradienten angewandt, lassen sich die folgenden Gleichungen formulieren (das Partikelvolumen  $\Delta V_j$  wurde dabei durch den Quotienten  $m_j/\rho_j$  ersetzt, die Abhängigkeit der Wichtungsfunktion von  $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}$  und  $h$  wird im folgenden nicht mehr explizit angegeben):

$$\frac{d\rho_I}{dt} = \rho_I \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \cdot \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \quad (6.15)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_I}{dt} = -\frac{1}{\rho_I} \sum_J (\boldsymbol{\sigma}_J + \boldsymbol{\sigma}_I) \cdot \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \quad (6.16)$$

$$\frac{de_I}{dt} = -\frac{1}{\rho_I} \boldsymbol{\sigma}_I : \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right) \quad (6.17)$$

$$\nabla \mathbf{v}_I = -\sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \quad (6.18)$$

### 6.1.3 Künstliche Viskosität

Wesentlich für die Berechnung der Ausbreitung von (Schock-)Wellen mit der SPH-Methode ist die Einführung einer künstlichen Viskosität. Hier wird die auch von Hiermaier (1996) verwendete, von Monaghan & Gingold (1983) eingeführte und mit Korrekturtermen  $f$  für Schubspannungszustände nach Balsara (1995) ergänzte Form benutzt. Sie wird als „bond“-Viskosität bezeichnet, weil für jedes Nachbarpartikel  $J$ , mit dem eine Interaktion stattfindet, ein gesonderter Anteil  $\Pi_{IJ}$  berechnet wird, der als zusätzlicher Druckterm in die SPH-Summengleichungen eingeht. Die „bond“-Viskosität wird nur berechnet, wenn sich die zwei Partikel aufeinander zubewegen, wenn also das Skalarprodukt  $\mathbf{v}_{IJ} \cdot \mathbf{x}_{IJ} \leq 0$  ist, ansonsten wird  $\Pi_{IJ} = 0$  gesetzt.

$$\Pi_{IJ} = \frac{(-\alpha \bar{c}_{IJ} v_{visc} + \beta v_{visc}^2) f_I + f_J}{\bar{\rho}_{IJ} \cdot 2}, \quad v_{visc} = \frac{\bar{h}_{IJ} \mathbf{v}_{IJ} \cdot \mathbf{x}_{IJ}}{\mathbf{x}_{IJ} \cdot \mathbf{x}_{IJ} + \varepsilon \bar{h}_{IJ}^2} \quad (6.19)$$

$$f_I = \frac{|\nabla \cdot \mathbf{v}|_I}{|\nabla \cdot \mathbf{v}|_I + |\nabla \times \mathbf{v}|_I + \frac{0.0001 c_I}{h_I}} \quad (6.20)$$

Die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  sind dabei in der Größenordnung von 1 zu wählen,  $\varepsilon$  ist meist 0.1. Die mit Querbalken gekennzeichneten Größen ( $\bar{\rho}_{IJ}$ ,  $\bar{c}_{IJ}$ ,  $\bar{h}_{IJ}$ ) sind als Mittelwerte zwischen den beiden betrachteten Partikeln zu berechnen, die Größen  $\mathbf{v}_{IJ}$  und  $\mathbf{x}_{IJ}$  sind die Differenzvektoren

$$\mathbf{v}_{IJ} = \mathbf{v}_I - \mathbf{v}_J \text{ bzw. } \mathbf{x}_{IJ} = \mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J.$$

Neben der „bond“-Viskosität kann auch eine nur aus Werten am Ort eines Partikels zu berechnende Viskosität („nodal viscosity“) formuliert werden:

$$q_I = C_L c_I \rho_I h_I |\nabla \cdot \mathbf{v}| + C_Q \rho_I h_I^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}_I)^2 \quad (6.21)$$

Sie wirkt nur bei Kompression ( $\nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0$ ).

Johnson, Stryk & Beissel (1996) untersuchen die Auswirkungen der Anwendung der beiden verschiedenen Formen der Viskosität für Werte der Koeffizienten  $0.05 \leq C_L \leq 0.5$  und  $0.5 \leq C_Q \leq 4$ . Der wesentliche Unterschied liegt zunächst darin, daß die „nodal“-Form nur aufgrund volumetrischer Deformation aktiviert wird, während die „bond“-Viskosität auch bei reiner Scherbelastung und inkompressiblen Materialverhalten wirkt. Die „bond“-Viskosität hat den Nachteil, daß sie zu einer künstlichen Erhöhung der Festigkeit führen kann, Johnson, Stryk & Beissel betonen jedoch auch, daß viele Aufgaben mit hohen Impaktgeschwindigkeiten und großen Deformationen ohne Verwendung der „bond“-Viskosität nicht berechnet werden können.

Die „bond“-Viskosität führt zur Erweiterung der SPH-Näherungen der Impuls- und Energieerhaltungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_I}{dt} &= -\frac{1}{\rho_I} \sum_J (\sigma_J + \sigma_I - I\Pi_{IJ}) \cdot \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \\ \frac{de_I}{dt} &= -\frac{1}{\rho_I} \sum_J \left( \sigma_I - I \frac{\Pi_{IJ}}{2} \right) : ((\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W) \frac{m_J}{\rho_J} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Diese Formulierung wird im weiteren als „Standard-SPH“ bezeichnet, sie entspricht im wesentlichen der bereits von Libersky & Petschek (1991) und auch von Hiermaier (1996) verwendeten. Sie wird, neben der unten beschriebenen normalisierten SPH-Methode, auch in der vorliegenden Arbeit benutzt.

#### 6.1.4 Erweiterungen

Hiermaier (1996) hat in seinem Programm SOPHIA einige Ergänzungen des Standard-SPH-Verfahrens eingeführt, die hier übernommen und im folgenden nur kurz erläutert werden:

1. Verwendung eines zellorientierten Suchalgorithmus für Partikel. Dieser Algorithmus dient zur Auffindung der Nachbarn eines Partikels, für das die Summengleichungen auszuwerten sind. Der Algorithmus basiert auf der Unterteilung des Gesamtgebietes in regelmäßige Zellen. In jedem Zeitschritt werden die Partikel den Zellen zugeordnet. Über das Verhältnis von  $h$ -Radius zu Zellgröße kann die Anzahl der Zellen, in denen mögliche Nachbarn gesucht werden müssen, bestimmt werden.
2. Variabler  $h$ -Radius für Partikel. Der  $h$  Radius wird dabei kontinuierlich der Dichteänderung

eines Partikels angepaßt, um die Anzahl der Nachbarn eines Partikels während der Rechnung möglichst konstant zu halten. Um die Symmetrie in der Impulserhaltungsgleichung zu bewahren, muß bei der Bestimmung des Wertes der Wichtungsfunktion mit einem mittleren Approximationsradius  $h_{ij}=0.5(h_i+h_j)$  gerechnet werden, dies trifft dann natürlich auch auf die Impulserhaltungsgleichung zu.

3. Realisierung von Randbedingungen durch virtuelle Partikel („ghost particles“). Zur Simulation von starren Wänden oder Symmetriebedingungen wird zu jedem Partikel, in dessen Einflußbereich die Randbedingung liegt, symmetrisch zur betrachteten Ebene ein „virtuelles“ Partikel mit den gleichen Zustandsgrößen erzeugt, die vektoriellen und tensoriellen Größen werden an der entsprechenden Symmetrieebene gespiegelt.

## 6.2 Weiterentwicklung des SPH-Verfahrens

Die Standard-SPH-Methode besitzt die Vorteile der einfachen Implementierung und der Unempfindlichkeit auch gegenüber großen Verzerrungen. Nachteilig sind jedoch numerische Defizite und Instabilitäten, die zu Oszillationen von Zustandsgrößen, „Klumpen“ oder Paarbildung von Partikeln und in einigen besonderen Fällen (z. B. reine Rotation, siehe Scheffer & Hiermaier, 1999) zur völligen Zerstörung der Lösung führen kann. Die Behebung dieser Defizite war in den vergangenen Jahren ein Hauptarbeitsgebiet der Forschungen zur SPH-Methode. Wenngleich auch verschiedene Ansätze vorgeschlagen wurden, hat sich eine vielseitig einsetzbare, effiziente und stabile „Standard“-Lösung des Problems noch nicht gezeigt. Da eine verbesserte Version des SPH-Verfahrens Eingang in die Kopplung mit finiten Elementen finden soll, werden Probleme und Lösungsansätze im folgenden diskutiert.

### 6.2.1 Defizite des „Standard-SPH“-Verfahrens

Die numerischen Defizite der SPH-Methoden lassen sich verschiedenen Problemfeldern zuordnen (vgl. Bonet & Kulasegaram, 2000).

1. *Instabilität durch die Form der Kernel-Funktion.* Der Verlauf der Kernel-Funktion und ihrer Ableitungen spielt bei der Entstehung der Instabilität eine wichtige Rolle. Dieser Verlauf ist für den zweidimensionalen Fall in Abbildung 6.1 dargestellt. Die Abbildung 6.6 zeigt den qualitativen Verlauf von  $W$ , der ersten Ableitung  $W'$  und der zweiten Ableitung  $W''$  im eindimensionalen Fall.

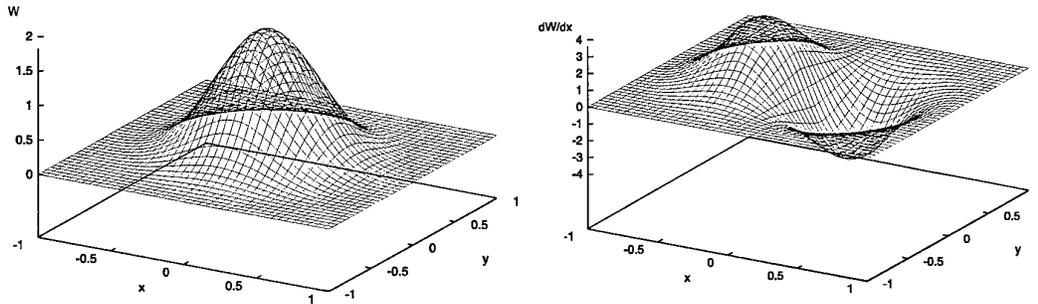


Abbildung 6.1: Verlauf der Wichtungsfunktion und ihrer Ableitung in  $x$ -Richtung

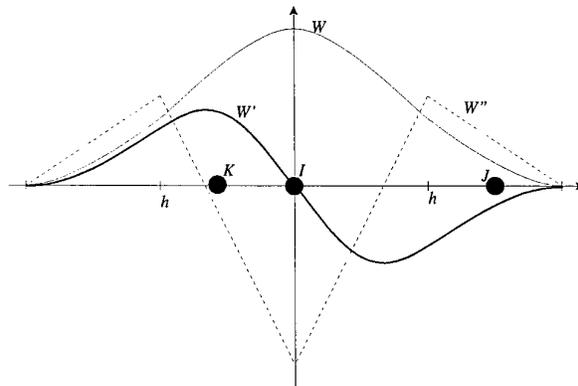


Abbildung 6.2: Verlauf von Kernel-Funktion, erster und zweiter Ableitung im eindimensionalen Fall.

Hiermaier (1996) hat den von Swegle et al. (1995) mit der Stabilitätsanalyse nach von Neumann untersuchten Effekt beschrieben. Das ursprünglich als „Zuginstabilität“ betrachtete Verhalten kann auch unter Druckspannungen auftreten, und zwar immer dann, wenn das Produkt aus der zweiten Ableitung  $W''$  und der Spannung größer als 0 ist:

$$\sigma_{xx} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} > 0 \quad (6.23)$$

Anschaulich kann man den Effekt folgendermaßen darstellen: wenn die Partikel  $I$  und  $J$  (Abbildung 6.6) beide unter Zugspannungen stehen und sich Partikel  $J$  vom Partikel  $I$  entfernt, wird der durch die SPH-Näherung berechnete Anteil für den Deformationsgradienten kleiner, je weiter  $J$  nach rechts rückt; der gleiche Verformungsschritt innerhalb eines Zeitschrittes führt zu einem immer kleineren Steigerungsschritt in der Zugspannung in  $I$ . In gleicher Weise wird der Beitrag von  $J$  in der Impulsbilanz immer geringer, aufgrund der expliziten Zeitintegration jedoch Phasenverschoben zur Steigerung der Zugspannungen. Eine von außen eingebrachte Störung, etwa eine kleine Bewegung eines Partikels in einer Reihe ruhender Partikel unter Zug, kann deswegen durch Oszillationen anwachsen, das Verfahren wird instabil. Herrschen Druckspannungen und bewegt sich  $J$  auf  $I$  zu, tritt der Effekt nicht auf, denn der Widerstand

(Druckspannungen, Beitrag zur Impulsbilanz) nimmt mit jedem Verformungsschritt zu. Die geschilderten Verhältnisse gelten für den Bereich  $W'' > 0$ , im Bereich  $W'' < 0$  (Partikel  $K$  in der Abbildung) ist der Effekt genau umgekehrt.

Balsara (1995) wendet ebenfalls die bei Finite-Differenzen-Methoden gebräuchliche von-Neumann-Analyse an und untersucht das Verhalten der SPH-Methode für verschiedene Verhältnisse von Partikelabstand  $\Delta s$  zu Approximationsradius  $h$  und verschiedene Kernel-Funktionen bei unterschiedlichen Wellenlängen. Er stellt unter anderem fest, daß für die hier genannte Spline-Funktion dieses Verhältnis zwischen 1.4 und 1.6 liegen sollte. Kleinere  $h$ -Radien führen zu physikalisch unkorrekten Ergebnissen, z. B. zu geringen Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten, größere Radien bewirken eine große Dispersion (Verschmieren der Welle).

2. *Fehler in der Summation bzw. Integration führen dazu, daß die Vollständigkeit bzw. Konsistenz der Approximation nicht gewährleistet ist.* Belytschko et al. (1998) untersuchen die SPH-Methode aus der Sicht der Analyse Finiter Elemente. Sie benutzen das Konzept der Vollständigkeit als Voraussetzung für die Konvergenz eines Galerkin-Verfahrens (vgl. Kapitel 3). Die Vollständigkeit spielt dabei die Rolle, die die Konsistenz in Finite-Differenzen-Verfahren hat. Belytschko et al. (1998) stellten fest, daß diese für die SPH-Methode bei einer allgemeinen Partikelanordnung nicht gegeben ist. Wie bereits bei der Einführung der kubischen Splinefunktion als Kernel-Funktion erwähnt, liefert diese nur bei regelmäßiger Partikelanordnung eine exakte Approximation des Gradienten einer linearen Funktion. Da sich die Partikel jedoch gegeneinander verschieben, ist diese Bedingung in der Praxis nicht erfüllt. Die Summation über Nachbarpartikel kann als diskrete Integration der kontinuierlichen Kernel-Approximation betrachtet werden, und diese ist wegen

$$\sum_j W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, h) \Delta V_j \neq 1 \quad (6.24)$$

nicht korrekt. Die Approximation kann keine konstanten Felder reproduzieren, sie erfüllt nicht die Bedingung der Vollständigkeit „nullter“ Ordnung, daher kann sie auch keine vollständige Approximation der durch die Differentialgleichungen geforderten Ordnung liefern. Belytschko et al. zeigen weiter, daß mit einem Approximationsverfahren, das konstante Funktionen und deren Ableitung exakt reproduziert, die lineare Impulserhaltung automatisch erfüllt ist (beim Standard-SPH-Verfahren wird die lineare Impulserhaltung auf andere Weise sichergestellt, Glg. 6.14). Wenn das Verfahren lineare Funktionen reproduzieren kann, ist darüber hinaus die Erhaltung des Drehimpulses gewährleistet.

3. *Singuläre Bewegungsmodi.* Ähnlich den „Hourglass“-Modi bei Finiten Elementen treten auch beim Standard-SPH-Verfahren Bewegungsmodi auf, denen keine Kräfte entgegenwirken. Beispielhaft ist in der folgenden Abbildung ein solches Bewegungsschema mit den Verläufen der Ableitungen der Kernel-Funktionen der einzelnen Partikel und für den Fall  $\Delta s = h$  dargestellt. Dieser Modus, der einer Störung mit Wellenlänge  $2 \Delta s$  entspricht, ist singulär, weil bei der Berechnung an den inneren Partikeln aufgrund der Symmetrie in der Summe der Deformations-

gradient verschwindet. Ursache hierfür ist, daß Werte am betrachteten Partikel selbst nicht in die Summation eingehen, da der Gradient der Kernel-Funktion dort 0 ist. Entsprechendes gilt für die Impulserhaltungsgleichung.

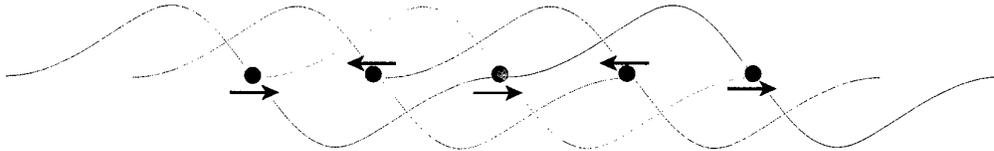


Abbildung 6.3: Singularärer Bewegungsmodus, Partikel mit Ableitung der Kernelfunktion,  $W'$

4. Die SPH-Methode besitzt nur die Künstliche Viskosität als Mittel für die Berechnung von Schockwellen. Balsara (1995) beschrieb ein weiteres Defizit der SPH-Methode. Bei der Berechnung von Schockproblemen wird die Konvergenz moderner Finite-Differenzen-Schemata gegen die Entropie-Lösung durch die Erfüllung bestimmter Eigenschaften gesichert. Man verwendet sog. „monotone“ Schemata oder Schemata, die der (schwächeren) Forderung genügen, „total variation diminishing“ (TVD) zu sein (vgl. Großmann und Roos (1994), S. 395 ff). Die in Kapitel 3 genannten Schemata von Godunov oder Lax-Friedrichs und auch das Lax-Wendroff-Schema erfüllen diese Forderungen. In der SPH-Methode gibt es dagegen bislang keine diskrete Form der Entropiebedingung, an deren Stelle tritt das ältere Konzept der künstlichen Viskosität. Dadurch ist die SPH-Methode nicht in der Lage, durch Iterationen einen stationären Schock korrekt zu lokalisieren. Der advective Transport der Entropiewelle ist korrekt, die Frequenzspektren sich ausbreitender Wellen werden jedoch verändert (Fehler in der spektralen Advektion) (Balsara, 1995).

5. Die Simulation von Randbedingungen ist eingeschränkt. Freie Ränder können zwar durch die Symmetrische Formulierung der SPH-Summe für die Impulserhaltungsgleichung abgebildet werden, es besteht in der Standard-SPH-Methode jedoch kein adäquates Verfahren, um Druck- bzw. Krafrandbedingungen zu berücksichtigen. Die Kontaktberechnung zwischen Körpern kann durch Berücksichtigung der Partikel des jeweils anderen Körpers erfolgen, auch dieses Verfahren hat jedoch Nachteile.

In praktischen Berechnungen treten die genannten Defizite gemeinsam auf und können sich gegenseitig verstärken, insbesondere können das Zusammenwirken der Kernel-Instabilität und des singularären Bewegungsmodus zu dem Zuginstabilität („tensile instability“) genannten Effekt starker Oszillationen unter Zugspannungen führen.

### 6.2.2 Ansätze zur Verbesserung des SPH-Verfahrens

Seit die SPH-Methode größere Aufmerksamkeit für die Berechnung strukturmechanischer Probleme erlangt hat, wurde eine Reihe von Lösungsansätzen für die genannten Defizite entwickelt:

- Guenther, Hicks & Swegle (1994) und Swegle et al. (1994) entwickelten das Verfahren des „conservative smoothing“ (CS), bei dem die diskreten SPH-Formen der Erhaltungsgleichungen nicht direkt verwendet werden, um etwa Beschleunigungen etc. zu berechnen, vielmehr werden die berechneten Größen zwischen benachbarten Partikel mit einbezogen, und so z. B. eine „gemittelte“ Beschleunigung berechnet. Dieses „smoothing“ ist so konstruiert, daß dabei die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie sichergestellt ist und die Entropie ansteigt. Hicks & Liebrock (1999) weisen darauf hin, daß CS auch die Variation der spezifischen Energie, des spezifischen Volumens und des spezifischen Impulses, bzw. der Geschwindigkeit, vermindert, das Verfahren also „variation diminishing“ ist. Wird CS nur auf die Impulserhaltungsgleichung angewandt, kann der gleiche Effekt wie bei Verwendung der künstlichen Viskosität festgestellt werden, die künstliche Viskosität ist quasi als Spezialfall des CS zu betrachten.
- Hicks & Liebrock (1999) schlagen mit dem „shape shifting“ ein Verfahren vor, die Form der Kernel-Funktion so zu verschieben, daß die Instabilitätsbedingung (Glg. 6.23) nicht eintritt.
- Dyka & Ingel (1995) entwickelten eine Methode, bei der zwischen den Partikeln Spannungspunkte (SP) plaziert werden. An diesen Punkte werden auch die Deformationsraten berechnet. Dadurch wird insbesondere das Auftreten singulärer Bewegungsmoden vermindert. Libersky & Randles (1999) haben diese Idee aufgegriffen und für mehrdimensionale Berechnungen verallgemeinert.
- Liu et al. (1996) entwickelten die sogenannte „Reproducing Kernel Particle Method“ (RKPM), die einige Gemeinsamkeiten mit der SPH-Methode aufweist, allerdings auf der schwachen Form der Erhaltungsgleichungen und einem gesonderten Integrationsschema beruht. Sie liefert jedoch ein Verfahren für eine konsistente netzfreie Approximation.
- Johnson & Beissel (1996) entwickelten ein Verfahren, das durch eine Normalisierung der Kernel-Approximationen eine von erster Ordnung konsistente Approximation ermöglicht (NSPH). Randles & Libersky (1996) erweiterten und verallgemeinerten das Konzept. Es wird unten eingehender erläutert. Libersky & Randles (1999) kombinierten das Verfahren mit der SP-Methode (s.o.).
- Beissel & Belytschko (1996) entwickelten für die EFG-Methode mit knotenweiser Integration, die einige Gemeinsamkeiten mit der SPH-Methode aufweist, einen Stabilisierungsterm, der das Auftreten der Oszillationen durch singuläre Bewegungsmoden verhindert. Das Verfahren wurde bislang jedoch noch nicht in der SPH-Methode eingesetzt.
- Chen, Beraun & Jih (1999) entwickelten eine Formulierung für die SPH-Approximation aus dem Einsetzen der Kernel-Näherung in eine Taylorreihe. Die Konsistenzordnung wird dabei durch die Anzahl der betrachteten Reihenglieder bestimmt. Sie beschreiben das CSPM genannte Verfahren für eine Konsistenzordnung von 1 (linear), dies führt auf die gleichen Ausdrücke, wie sie in der NSPH-Methode verwendet werden.
- Dilts (1999) und Scheffer & Hiermaier (1999) verwenden die „Moving Least Squares“ Methode für die Berechnung der Basisfunktion und können dadurch die Konsistenz der

SPH-Methode sicherstellen.

- Bonet, Kulasegaram und Lok (1999) verwenden in ihrer „Corrected SPH“ (CSPH) genannten Methode drei getrennte Korrekturen für die verbesserte Berechnung von Gradienten mit der SPH-Methode: Sie korrigieren die Kernelfunktion selbst, die Summation (Korrektur der Integration) und verwenden einen Stabilisierungsterm mit ähnlicher Funktion wie der von Beissel & Belytschko (1996) entwickelte.
- Hayhurst (1999) untersuchte das Stabilitätsverhalten der SPH-Methode im Vergleich mit verschiedenen Weiterentwicklungen (RKPM, MLS, Normalisierung) und einem eigenen, als FKM (Finite Kernel Method) bezeichneten Verfahren. Die durchgeführten mathematischen Analysen und numerischen Untersuchungen zeigen eine Verbesserung durch die weiterentwickelten Verfahren, eine dem Stabilitätsverhalten netzbasierter Verfahren vergleichbare Qualität wird jedoch nicht erreicht.

Wie oben bereits angedeutet, hat sich noch keine der genannten - oder weiterer, ungenannter Methoden - als „SPH-Methode der Zukunft“ herauskristallisiert. Alle bieten verschiedene Vorteile - die Nachteile bleiben allerdings in der Literatur bislang meist ungenannt.

In der vorliegenden Arbeit wird zur Verbesserung der SPH-Methode zunächst nur die Normalisierung verwendet, sie ist vergleichsweise gut erprobt und wird von verschiedenen Arbeitsgruppen eingesetzt. Die Normalisierung stellt die Konsistenz des Verfahrens sicher und läßt sich ohne allzu großen Aufwand implementieren. Allerdings gibt es auch für das normalisierte SPH-Verfahren, im folgenden mit NSPH bezeichnet, verschiedene Formulierungen. Bei einer dieser Formulierungen sind die Randbedingungen auf gesonderte Weise zu berücksichtigen, so daß freie Ränder - anders als bei der Standard-SPH-Methode - durch ein eigenes Verfahren behandelt werden müssen. Ein Vergleich der verschiedenen Konzepte zur Verbesserung der SPH-Methode wäre wünschenswert, verläßt jedoch den Rahmen dieser Arbeit.

### 6.2.3 Normalisiertes SPH-Verfahren

Johnson & Beissel (1995) stellten zunächst ein Konzept der Normalisierung vor, das eine Korrektur der berechneten Gradienten in den Koordinatenrichtungen ermöglichte. Randles & Libersky (1996) verallgemeinerten den Ansatz so, daß die Konsistenzbedingung (Glg. 6.11) an beliebig orientierten Rändern und bei unregelmäßiger Anordnung der Partikel erfüllt wird. Dies geschieht durch Division der Summe in Glg. 6.5 durch die Summe der Produkte aus Wichtungsfunktionen und Partikelvolumina:

$$u_h = \frac{\sum_J u_J W \frac{m_J}{\rho_J}}{\sum_J \frac{m_J}{\rho_J} W} \quad (6.25)$$

Das entsprechende Verfahren, um Approximationen der Ableitungen an den Rändern zu verbessern, läßt sich aus der Bedingung herleiten, daß durch eine Erweiterung von 6.9 der Gradient einer linearen Funktion exakt approximiert werden soll (Konsistenz erster Ordnung). Dies erfordert die Berechnung einer Matrix  $\mathbf{B}$  als Inverse einer Matrix aus dem Vektor der Koordinatendifferenzen und den Ableitungen der Wichtungsfunktion (Glg. 6.27).

$$\nabla u_h = \left( -\sum_J (u_J - u) \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{B} = \left( -\sum_J (\mathbf{x}_J - \mathbf{x}) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right)^{-1} \quad (6.27)$$

Randles & Libersky geben die folgenden normalisierten Formen für die Erhaltungsgleichungen und den Geschwindigkeitsgradienten an:

$$\frac{d\rho_I}{dt} = \rho_I \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (6.28)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_I}{dt} = \frac{1}{\rho_I} \left( -\sum_J (\sigma_J - \sigma_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (6.29)$$

$$\frac{de_I}{dt} = -\frac{1}{\rho_I} \sigma_I \cdot \left[ \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \quad (6.30)$$

$$\nabla \mathbf{v}_I = \left( -\sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (6.31)$$

In der Impulserhaltungsgleichung taucht dabei im dreidimensionalen ein Produkt aus einer  $3 \times 3 \times 3$  Matrix (Term in der großen Klammer) und der  $3 \times 3$  Matrix  $\mathbf{B}$  auf. Die Gleichungen für Impulserhaltung und Energieerhaltung sind zur Berücksichtigung der künstlichen Viskosität zu erweitern:

$$\frac{d\mathbf{v}_I}{dt} = \frac{1}{\rho_I} \left( -\sum_J \left( \sigma_J - \sigma_I - \mathbf{I} \frac{\Pi_{IJ}}{2} \right) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (6.32)$$

$$\frac{de_I}{dt} = -\frac{1}{\rho_I} \left[ \left( \sum_J \left( \sigma_I - \mathbf{I} \frac{\Pi_{IJ}}{2} \right) \cdot ((\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W) \frac{m_J}{\rho_J} \right)^T \cdot \mathbf{B} \right] \quad (6.33)$$

Beachtenswert ist, daß nun in allen Fällen Differenzen für die Größen einzusetzen sind, deren Gradient ermittelt werden soll ( $\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I$  bzw.  $\sigma_J - \sigma_I$ ).

In der Standard-SPH-Methode wird in der Impulserhaltungsgleichung die Summe  $\sigma_J + \sigma_I$  verwendet, um symmetrische Wechselwirkungen zwischen den Partikeln und damit die globale Impulserhaltung zu gewährleisten; gleichzeitig werden dadurch die Bedingungen des freien Randes simuliert. Die oben gezeigte normalisierte Form besitzt diese Eigenschaft nicht mehr. Belytschko et al. (1998) zeigen jedoch einen Beweis dafür, daß für die in Glg. 6.32 verwendete Form, die linear verteilte Feldgrößen und deren Ableitungen exakt reproduziert, die globale Erhaltung des linearen Impulses und des Drehimpulses gewährleistet ist.

Anders als Randles & Libersky (1996) verwenden Johnson, Stryk & Beissel (1996) auch mit der Normalisierung die Summe  $\sigma_j + \sigma_i$  in der Impulserhaltungsgleichung:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho_i} \left( - \sum_j \left( \sigma_j + \sigma_i - I \frac{\Pi_{ij}}{2} \right) \otimes \nabla W \frac{m_j}{\rho_j} \right) : \mathbf{B} \quad (6.34)$$

Die Verwendung der Summe  $\sigma_j + \sigma_i$  führt noch nicht zu symmetrischen Wechselwirkungen zwischen Partikeln, da durch die Matrix  $\mathbf{B}$ , die für jedes Partikel unterschiedlich sein kann, die Beschleunigungen modifiziert werden, doch können damit die Bedingungen des freien Randes näherungsweise abgebildet werden. Diese Form wird auch in der vorliegenden Arbeit verwendet.

#### 6.2.4 Anwendung der Normalisierung

Der Effekt der Normalisierung soll am Beispiel der eindimensionalen Ausbreitung einer rein elastischen Welle dargestellt werden. Hierzu wurde in einem ruhenden, durch 100 Partikel diskretisierten Stahlstab (eindimensionaler Verzerrungszustand) zum Zeitpunkt  $t=0$  am linken Rand eine Geschwindigkeitsrandbedingung erzeugt, indem die Geschwindigkeit der 3 ersten Partikel auf den Wert von  $0.001 \text{ cm}/\mu\text{s}$  gesetzt und gehalten wird. Die analytische Lösung des Problems ist eine nach rechts fortschreitende „Rechteckwelle“. Die numerische Lösung mit einer künstlichen Viskosität führt zu einer über mehrere Partikel „verschmierten“ Wellenfront. Die Steilheit der Wellenfront läßt sich durch eine Anpassung der Parameter der künstlichen Viskosität verändern, für eine bessere Vergleichbarkeit werden im folgenden jedoch die Standardwerte  $\alpha=1$  und  $\beta=1$  verwendet.

In Abbildung 6.4 sind die Lösungen mit dem Standard-SPH-Verfahren (SPH) und dem normalisierten Verfahren (NSPH) für verschiedene Verhältnisse von Approximationsradien  $h$  zu Partikelabstand  $d$  einander gegenübergestellt. Deutlich ist dabei zu erkennen, daß das Standard-SPH-Verfahren den genannten Effekt der Abhängigkeit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit von diesem Verhältnis besitzt und daß bei einer Berücksichtigung von 2 Nachbarn in jeder Richtung ( $h=1.25d$ ) die Ausbreitungsgeschwindigkeit in etwa korrekt ist. Mit größerem  $h$ -Radius wird allerdings die Dispersion größer und damit die Wellenfront flacher.

Die Simulation mit dem NSPH-Verfahren zeigt, daß bei Verwendung der Normalisierung die Ausbreitungsgeschwindigkeit unabhängig vom Approximationsradius ist. Unter diesem Aspekt ist es daher ausreichend, einen Nachbarn auf jeder Seite zu betrachten. Wie beim Standard-SPH-Verfahren wächst mit dem Interpolationsradius die Dispersion. Am linken Rand zeigen sich bedingt durch die Randbedingungen kleine Störungen.

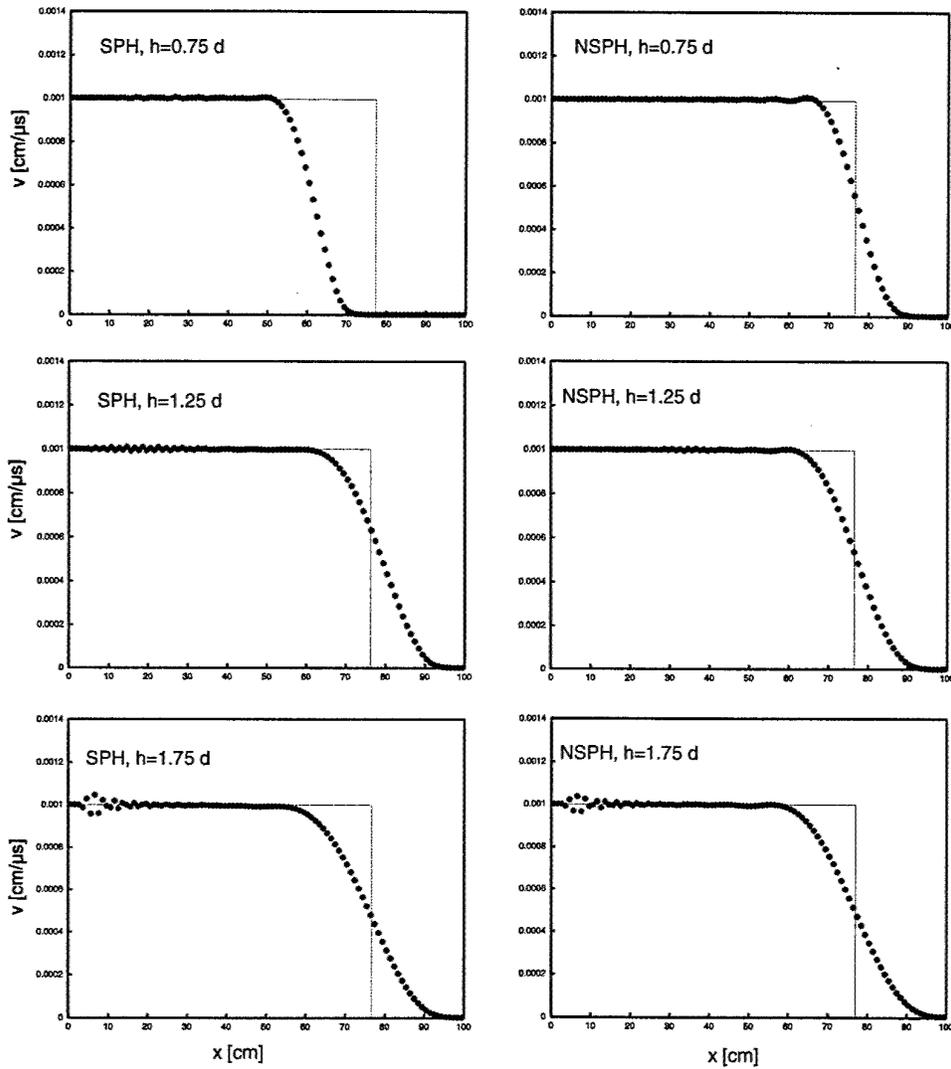


Abbildung 6.4: Vergleich der Ergebnisse einer eindimensionalen Wellenausbreitungsberechnung mit Standard-SPH und normiertem SPH-Verfahren

## 7. VERFAHREN ZUR KOPPLUNG VON SPH- UND FINITE-ELEMENTE-METHODE

In diesem Abschnitt werden zunächst aus der Literatur bekannte Verfahren für eine Kopplung von Finiten Elementen mit der SPH-Methode dargestellt und diskutiert. Anschließend wird ein neuer Ansatz vorgestellt, der auf einer kontinuierlichen („hybriden“) Approximation der Zustandsgrößen zwischen SPH- und FE-Bereich beruht und den bestehenden Verfahren gegenüber verschiedene Vorteile aufweist. Er wurde speziell für den Einsatz bei der adaptiven Umwandlung von Elementen in Partikel konzipiert. Das Verfahren wurde in dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Programm implementiert. Am Beispiel der eindimensionalen Ausbreitung einer elastischen Welle können zunächst Auswirkungen verschiedener Parameter der neuen Kopplung studiert und mit den Ergebnissen bestehender Verfahren verglichen werden. Der Einsatz in einer Impaktberechnung wird in Kapitel 9 beschrieben.

### 7.1 Bekannte Kopplungsverfahren

#### 7.1.1 Master-Slave Algorithmus

##### 7.1.1.1 Übersicht

Attaway, Heinstein & Swegle (1994) verwenden einen Master-Slave-Algorithmus, wie er in ähnlicher Form auch in üblichen reinen Finite-Element-Anwendungen eingesetzt wird, zur Kopplung von Finiten Elementen mit der SPH-Methode im Programm PRONTO-3D der Sandia National Laboratories. Zwischenzeitlich wurde sowohl das SPH-Verfahren als auch die Kontaktberechnung parallelisiert (Plimpton et al., 1998).

Der von Attaway, Heinstein & Swegle für den zweidimensionalen Fall geschilderte Kontaktalgorithmus basiert auf einem Prädiktor-Korrektor Verfahren. Zunächst wird überprüft, ob ein Partikel (Slave) die Oberfläche eines finiten Elementes (Master) im aktuellen Zeitschritt durchdringen würde. Hierzu erfolgt eine Berechnung fiktiver (im folgenden durch  $\hat{\phantom{x}}$  gekennzeichnet) Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Koordinaten auf der Basis der alleinigen Interaktion der Partikel untereinander sowie der entsprechenden Werte der FE-Knoten aus der FE-Rechnung. Ergebnis einer von den Autoren nicht näher beschriebenen Kontaktprüfung ist eine Eindringtiefe  $\delta$  (Abbildung 7.1).

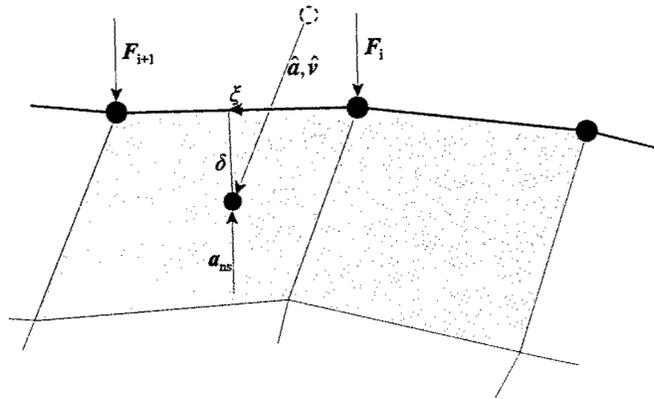


Abbildung 7.1: Kontaktberechnung mit Master-Slave-Algorithmus für den Kontakt zwischen Partikeln und Elementen

Aus der Eindringtiefe, der Zeitschrittlänge  $\Delta t$  und der Masse des Slave-Partikels läßt sich eine Beschleunigung senkrecht zur Masterfläche so berechnen, daß im betrachteten Zeitschritt kein Eindringen stattfindet:

$$a_n = \frac{\delta}{\Delta t^2} \quad f_s = \frac{m_s \delta}{\Delta t^2} \quad (7.1)$$

Die Reaktionskräfte der Kontakte mit möglicherweise mehreren Partikeln auf die Knoten werden entsprechend der lokalen Koordinaten  $\xi_s$  aufgeteilt ( $-0.5 \leq \xi_s \leq 0.5$ , Koordinate der Fußpunkte der Normalen auf die Master-Fläche, im folgenden Kontaktpunkt genannt).

$$F_i = \sum_s \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) f_s \quad , \quad F_{i+1} = \sum_s \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) f_s \quad (7.2)$$

Da sich die Master-Oberfläche durch die Summe der für die einzelnen Partikel aufgebrachtene Kräfte selbst bewegt, und zwar von den Partikeln weg, sind die eigentlich nötigen Kontaktkräfte kleiner als die zunächst für eine "starre" Oberfläche berechneten. Zur Korrektur der Kräfte wird daher die Beschleunigung des Kontaktpunktes auf der Master-Fläche aus den Beschleunigungen der Knoten  $a_{n1}$  bzw.  $a_{n2}$  berechnet.

$$a_{cps} = \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) a_{n1} + \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) a_{n2} \quad (7.3)$$

Die korrigierten Reaktionskräfte sind dann

$$f_{cs} = \frac{m_s \delta}{\Delta t^2} - a_{cp} m_s \quad (7.4)$$

Mit den korrigierten Reaktionskräften können dann die neuen Beschleunigungen der Master-Knoten ermittelt werden. Dieses Verfahren kann nun iterativ fortgeführt werden, das heißt, es erfolgt eine erneute Berechnung der Beschleunigung der Kontaktpunkte und Korrektur der

Reaktionskräfte. Normalerweise ist eine Iteration jedoch ausreichend, der verbleibende Fehler wird im nächsten Zeitschritt ausgeglichen.

Attaway, Heinstein & Swegle (1994) weisen darauf hin, daß das Verfahren auch so formuliert werden kann, daß in einem Schritt eine Berechnung der Kontaktkräfte durch Lösen eines Gleichungssystems möglich wird. Benson (1992, S. 300 ff) beschreibt diesen für Finite Elemente entwickelten Algorithmus in PRONTO-3D etwas genauer. Für jeden „Slave“-Knoten wird dabei die Bedingung aufgestellt, daß er am Ende des Zeitschrittes genau auf der „Master“-Oberfläche liegt, also gerade nicht in das Element eindringt. Die Unbekannten der Gleichung sind dabei die Kräfte auf die „Slave“-Knoten und die Kräfte auf die „Master“-Knoten; letztere sind die Reaktionskräfte zur Summe aller Kräfte auf „Slave“-Knoten, mit denen die Segmente in Kontakt stehen. Die Impulsbedingung

$$\left( \sum_s \left( \frac{1}{2} + \xi_s \right) f_s \right)_- + \left( \sum_s \left( \frac{1}{2} - \xi_s \right) f_s \right)_+ + F_m = 0 \quad (7.5)$$

für jeden „Master“-Knoten mit den Kräften auf die „Slave“-Knoten des vorangegangenen (Index -) und folgenden (Index +) Segmentes liefert die zusätzlich benötigten Gleichungen.

Das geschilderte Verfahren wird in PRONTO-3D zur Simulation von Impaktproblemen, aber auch für die Berechnung von Fluid-Struktur Interaktionen benutzt. Hierbei wird die Struktur mit Finiten Elementen, das Fluid mit Partikeln diskretisiert.

Johnson (1994) verwendet in EPIC neben einen Master-Slave Algorithmus, den er als „sliding interface“-Algorithmus bezeichnet: wenn ein Partikel ein Master-Segment um einen bestimmten Betrag überlappt werden die Geschwindigkeiten des Partikels und der beteiligten Knoten so angepaßt, daß gleichzeitig die drei Bedingungen

- Erhaltung des linearen Impulses
- Erhaltung des Drehimpulses
- gleiche Geschwindigkeitskomponente von Partikel und Kontaktpunkt auf dem Segment in Richtung der Normalen auf das Segment

erfüllt werden. Den Partikeln wird dabei ein Durchmesser zugeordnet, der so groß ist wie der Abstand der Partikel untereinander. Von Johnson, Stryk & Beissel (1996) wird derselbe Algorithmus mit einer Variante der normalisierten SPH-Methode angewandt. Neben dreidimensionalen Anwendungen zeigen sie auch das Ergebnis einer Berechnung des Impakts von Wasser mit einer Geschwindigkeit von 300 m/s auf eine starre Wand unter der Voraussetzung eines eindimensionalen Dehnungszustandes. Die Druckwelle breitet sich aus dem mit FE diskretisierten in den mit SPH diskretisierten Bereich aus. Dabei zeigt sich im FE-Bereich eine durch die Reflexion an der Schnittstelle entstandene Welle. Im SPH-Bereich sind große Oszillationen erkennbar. Diese Oszillationen führen die Autoren darauf zurück, daß nur eine knotenweise künstliche Viskosität („nodal“ Form, vgl. Kapitel 6) mit denselben Koeffizienten wie im FE-

Bereich verwendet wurde, die Verwendung anderer Koeffizienten und der „bond“-Viskosität würde die Oszillationen dämpfen. Außerdem ist ein Drucksprung an der Schnittstelle zu beobachten, der nach den Autoren auf die Verwendung der Normalisierung im SPH-Bereich zurückzuführen. Sie erhöht die Kräfte auf die Randpartikel, daher müßte der Druck entsprechend sinken, um die richtigen Kräfte für die Wellenausbreitung zu erzeugen.

Johnson (1994) und Johnson, Stryk & Beissel (1996) verwenden den Master-Slave Algorithmus auch, um die Interaktion aufgrund eines Adaptivitätskriteriums erzeugter Partikel mit Finiten Elementen desselben Körpers zu bestimmen. Sie zeigen die Anwendung dieses Verfahrens in zweidimensionalen rotationssymmetrischen Impaktberechnungen.

In AUTODYN2D und AUTODYN3D (Hayhurst, Clegg, Livingstone & Francis, 1996) ist eine Kontaktberechnung zwischen Partikeln und (Lagrange-) Finite-Differenzen Zellen implementiert. Dabei wurde eine Variante des Master-Slave Algorithmus mit einer Hülle um die Master-Zellen verwendet, der ähnlich dem in Kapitel 5.5 geschilderten Kontaktalgorithmus ist. Allerdings wird die Dicke der Hülle vom Approximationsradius der Partikel bestimmt. Eine praktische Anwendung findet sich beispielsweise bei Hiermaier, Thoma & Könke (1997). Sie verwenden diesen Kontaktalgorithmus für die Simulation der Fluid-Struktur-Interaktion beim Auftreffen einer Druckwelle auf das berstende Fenster eines Gebäudes.

Das Ergebnis einer eindimensionalen Wellenausbreitungsberechnung mit dem Master-Slave-Algorithmus in AUTODYN2D (Version 3.1.18) ist in Abbildung 7.2 einer Master-Slave-Berechnung mit Lagrange-Zellen gegenübergestellt. In beiden Fällen ist die Trennfläche jeweils in der Mitte (bei 50 cm). Berechnet wurde die Ausbreitung einer Druckwelle für einen ideal elastischen Stahl. Die Druckwelle wurde durch eine zum Zeitpunkt  $t=0$  aufgebrachte Geschwindigkeitsrandbedingung ( $0.001 \text{ cm}/\mu\text{s}$ ) am linken Rand erzeugt, so daß die Welle in allen Darstellungen von links nach rechts läuft. Dargestellt sind die Ergebnisse nach  $128 \mu\text{s}$ .

Das Master-Slave-Verfahren verursacht bereits in der reinen Lagrange-Diskretisierung eine von der Kontaktfläche nach links laufende reflektierte Welle. Sie ist durch die Unterschiede in der Berechnung der Kräfte auf die Knoten bedingt: die Kräfte aus benachbarten Zellen sind in anderer Weise von Knotenverschiebungen abhängig als die durch den Kontaktalgorithmus berechneten. Bei der Kopplung mit Partikeln ist die Amplitude der reflektierten Welle größer, außerdem sind Oszillationen an der Kontaktfläche selbst zu beobachten, die jedoch rasch abnehmen. Die Kurven auf der rechten Seite sind in der grafischen Darstellung geglättet, daher zeigen sie nicht den treppenartigen Verlauf der Kurven für die Lagrange/SPH-Diskretisierung.

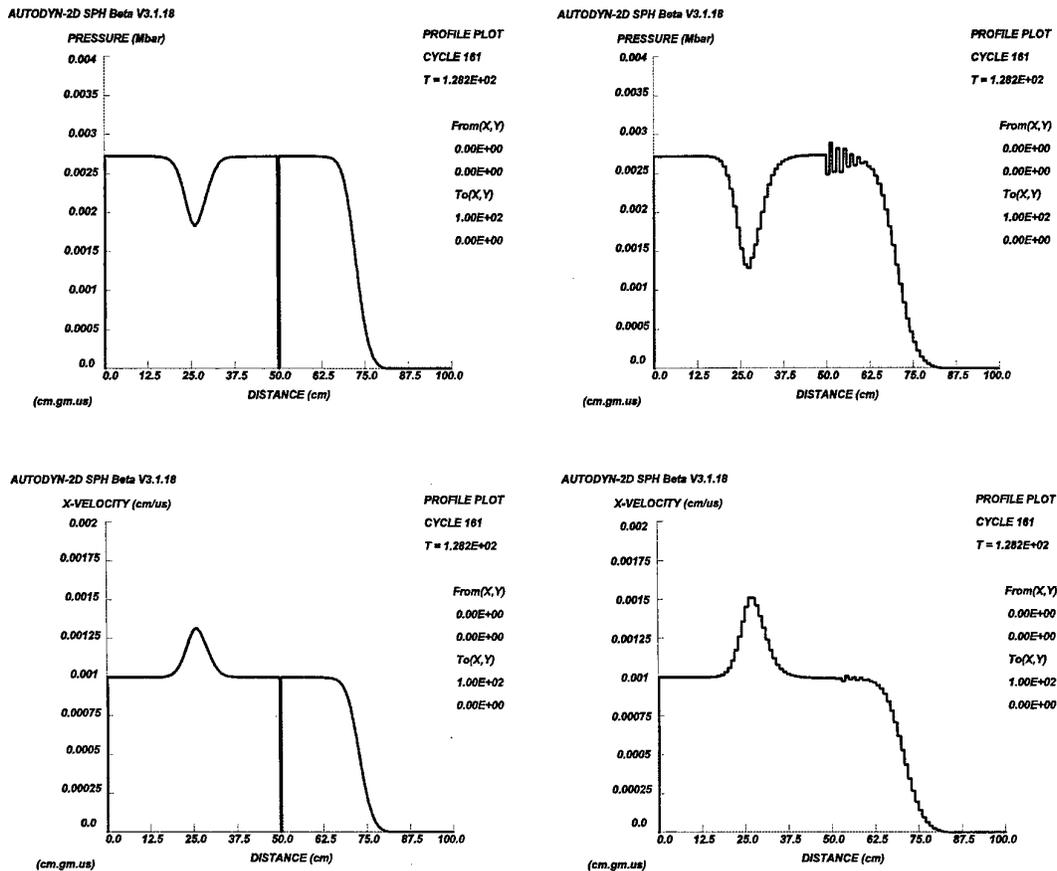


Abbildung 7.2: Eindimensionale Wellenausbreitungsberechnung mit Master-Slave-Algorithmus in AUTODYN. Links: Kontakt zwischen zwei Lagrange-Gittern. Rechts: Kopplung von Lagrange-Zellen mit SPH. Oben ist jeweils der Druck, unten die Geschwindigkeit dargestellt.

### 7.1.1.2 Diskussion

Die genannten Master-Slave-Algorithmen werden in verschiedenen Programmen zur Kopplung von SPH- und Netzmethoden für zwei- und dreidimensionale Berechnungen eingesetzt. Sie bewirken eine Kopplung der Verformungsbedingungen in der Normalenrichtung auf das betrachtete „Master“-Segment, so daß keine Partikel eindringen können. Parallel zu den Segmenten entsteht dabei eine Trennfläche, entlang der sich die Partikel bewegen können. Dies kann durchaus ein erwünschter Effekt sein, etwa bei der Berechnung von Fluid-Struktur-Interaktionen oder bei der Penetration eines relativ steifen, mit der Netzmethode diskretisierten Penetrators in eine sich stärker verformende und daher durch Partikel abgebildete Platte. Die Trennfläche führt aber dazu, daß sich die Oberflächen der diskretisierten Bereiche gegeneinander verschieben und auch voneinander lösen können, da keine Zugkräfte übertragen werden können. Sie beeinträchtigt außerdem die Ausbreitung einer Welle.

Zur Simulation der genannten Effekte (Fluid-Struktur-Interaktion, Kontakt zwischen Körpern) sind Master-Slave-Algorithmen geeignet. Die Einführung eines Reibungsbeiwertes zur Übertragung von Schubkräften ist zwar prinzipiell möglich. Für eine Kopplung zwischen Partikeln und Elementen eines zusammenhängenden Körpers, wie sie in der vorliegenden Arbeit für eine adaptive Berechnung benötigt wird, ist das Verfahren jedoch prinzipiell nicht anwendbar.

Die Verwendung für eine adaptive Kopplung, wie sie von Johnson, Beissel und Stryk (1996) gezeigt wird, wird von den Autoren selbst als unbefriedigende Näherung bezeichnet, weil sich die Partikel parallel zu der entstehenden Trennfläche frei bewegen können. Hayhurst, Clegg & Livingstone (1996) berichten von unphysikalischen Geschwindigkeiten beim Einsatz dieser Kopplung für den Ersatz verzerrter Differenzzellen und raten daher, einen Körper immer vollständig mit Partikeln zu diskretisieren.

### **7.1.1.3 Eigener Master-Slave-Algorithmus für die Kopplung von Partikeln und Elementen**

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde der in Abschnitt 5.5 dargestellte Kontaktalgorithmus um eine Kopplung von Partikeln und Elementen für zweidimensionale Berechnungen erweitert und somit ein Master-Slave-Algorithmus für den Kontakt zwischen Elementen und Partikeln implementiert. Er dient zum Vergleich mit dem noch zu beschreibenden neuen Kopplungsverfahren und kann in Kontaktberechnungen ohne Reibung eingesetzt werden. Wesentliche Unterschiede zum in Abschnitt 5.5 dargestellten Verfahren sind:

- es erfolgt in jedem Zeitschritt nur eine einmalige Kontaktbestimmung für den Kontakt zwischen Elementen und Partikeln, die Partikel sind immer „Slave“-Partikel.
- anstelle der Größe der Hülle (Gap) wird der halbe Abstand der Partikel untereinander  $\Delta s/2$  eingesetzt, die Größe der Hülle wird entsprechend den Änderungen des Approximationsradius  $h$  korrigiert, wenn sich die Partikelabstände ändern. Abbildung 7.3 illustriert die Kontaktberechnung für Kontakt mit einem Segment (a) sowie bei konkavem (b) und konvexem (c) Verlauf der Master-Oberfläche.

Mit dem implementierten Algorithmus kann einerseits die Interaktion eines mit quadrilateralen Elementen diskretisierten Körpers und Partikeln berechnet werden, andererseits können auch Vergleichsberechnungen mit anderen Kopplungsformen durchgeführt werden.

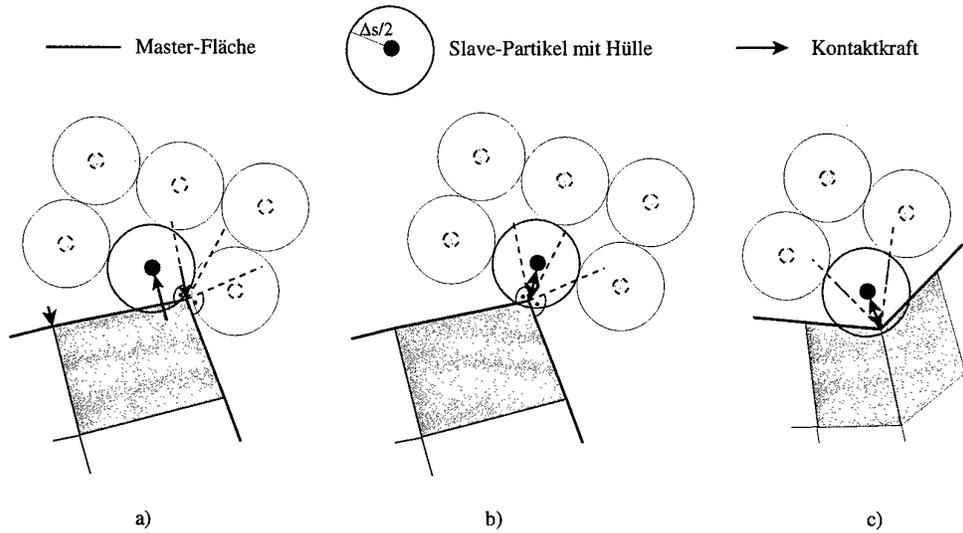


Abbildung 7.3: Implementierter Master-Slave-Algorithmus für den Kontakt zwischen Elementen und Partikeln in 2D

Abbildung 7.4 zeigt Ergebnisse des implementierten Master-Slave-Algorithmus für das bereits betrachtete Beispiel einer Welle in einem linear elastischen Stahl. Ein Approximationsradius vom 0.75-fachen des Partikelabstandes führt hier nicht nur zu einer fehlerhaften (zu geringen) Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (vgl. Abbildung 6.4), sondern auch zu einer zu hohen Partikelgeschwindigkeit im SPH-Bereich, die wiederum zu einer Entlastungswelle im FE-Bereich führt. Beide sind jedoch bei einem Approximationsradius vom 1.25-fachen des Partikelabstandes korrekt. In beiden Fällen zeigt sich eine an der Trennfläche reflektierte Welle.

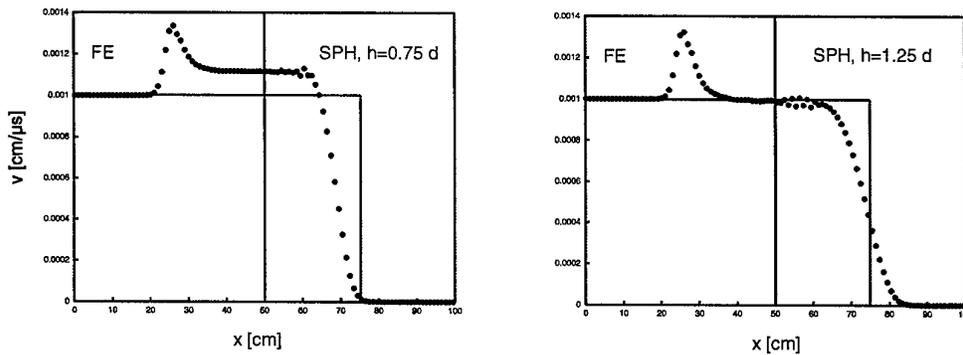


Abbildung 7.4: Wellenausbreitungsberechnung mit dem eigenen Master-Slave-Algorithmus für die Kopplung von SPH mit FE.

Die Ergebnisse weiterer Berechnungen mit dem Master-Slave-Algorithmus und der Vergleich mit anderen Kopplungsverfahren erfolgen in Abschnitt 7.3.

## 7.1.2 Übergangselemente: Partikel auf dem FE-Rand

### 7.1.2.1 Übersicht

Abbildung 7.5 zeigt das Prinzip einer Kopplung mit Übergangselementen, wie sie Johnson (1994) für die Standard-SPH-Methode und Johnson, Stryk & Beissel (1996) für das normalisierte SPH-Verfahren in EPIC verwenden. In der rechten Hälfte der Abbildung sind die Finiten Elemente dargestellt. Zwischen dem SPH-Bereich und den Elementen liegen Übergangselemente (gestrichelte Elementseiten). Der durchgezogene Kreis stellt den Einflußbereich ( $2h$ ) eines normalen Partikels dar. Der gestrichelte Halbkreis ist der Einflußbereich eines Partikels, das gleichzeitig Knoten eines Übergangselementes ist. Die Deformationsraten für dieses Partikel werden nur aus einer Summe über die übrigen Nachbarpartikel einschließlich der Partikel auf den Übergangselementen berechnet, die Geschwindigkeiten der benachbarten Knoten bleiben unberücksichtigt. Die Kräfte auf das Übergangspartikel kommen dagegen sowohl aus den umliegenden Partikeln als auch aus den Übergangselementen. Die Spannungen bzw. Spannungsraten in den Übergangselementen selbst werden aus den Geschwindigkeiten der Knoten und der zum jeweiligen Element gehörenden Übergangspartikel berechnet.

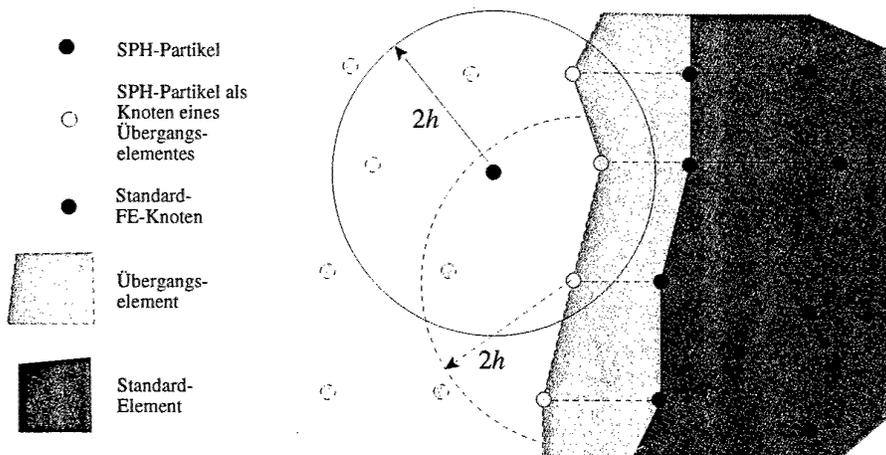


Abbildung 7.5: Kopplung mit Übergangselementen (Johnson, 1994)

In den genannten Literaturstellen wird an einigen Beispielen demonstriert, daß der Algorithmus brauchbare Ergebnisse bringt. Johnson, Stryk & Beissel (1996) zeigen, wie schon für den Master-Slave-Algorithmus, Ergebnisse des Verfahrens für die eindimensionale Ausbreitung einer Druckwelle in Wasser. Die von der Trennfläche reflektierte Welle ist in diesem Fall noch etwas größer, die Autoren führen dies darauf zurück, daß den Partikeln an den Übergangselementen eine größere Masse (Masse des Partikels plus Masse des Randknotens) zugewiesen wird.

Johnson, Stryk & Beissel (1996) weisen auch auf Fehler hin, die dadurch entstehen, daß die Deformationsraten für die Übergangspartikel unsymmetrisch, nur aus den umliegenden Partikeln, ohne Berücksichtigung der Elemente, berechnet werden. Strenggenommen gilt das auch für die Standard-Partikel, deren Einflußbereich in den FE-Bereich ragt. Für die angeführten Anwendungen (Penetrationsrechnungen) scheint dieser Effekt von untergeordneter Bedeutung zu sein. Zu prüfen bleibt, welchen Einfluß die Näherung in anderen Fällen hat.

Century Dynamics (1999) implementierten in einer Entwicklungsversion von AUTODYN eine Kopplung von Partikeln mit FD-Zellen für zweidimensionale Berechnungen. Dabei werden Partikel so plaziert, daß sie mit den Knoten des Netzes zusammenfallen oder direkt auf einer Zellseite fixiert sind, wie in Abbildung 7.7 dargestellt. Durch einen nicht näher erläuterten Algorithmus wird sichergestellt, daß die betreffenden Zellknoten und Partikel verbunden sind.

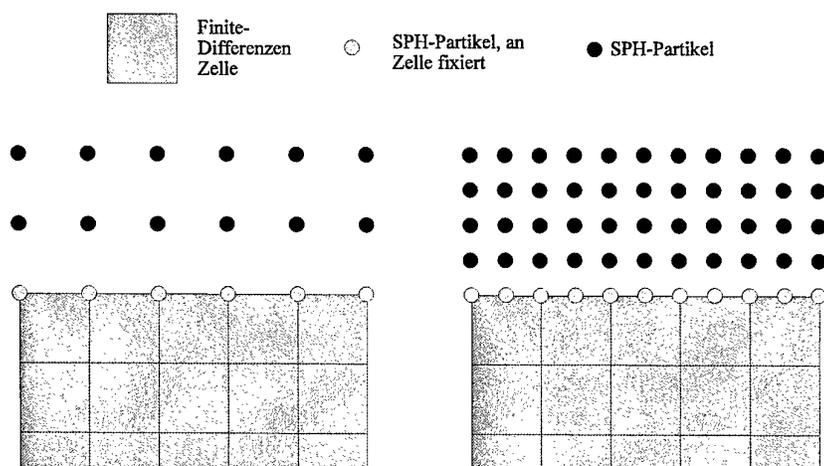


Abbildung 7.6: Optionen der Kopplung von SPH mit Lagrange-Zellen in AUTODYN2D

### 7.1.2.2 Diskussion

Die genannten Verfahren wird für bestimmte Verhältnisse von Partikel zu Element- bzw. Zellgröße eingesetzt. Das Verfahren in EPIC verlangt dabei Partikel mit genau der gleichen Masse wie die Knoten des angrenzenden FE-Netzes. Das in der Entwicklung befindliche Verfahren in AUTODYN2D erlaubt auch in regelmäßigem Verhältnis (1/2, 1/3 etc.) kleinere Partikel, wobei ein Verhältnis von 1:2 als günstig empfohlen wird. Für EPIC wurde auch das Ergebnis einer eindimensionalen Wellenausbreitungsberechnung angegeben, bei der sich eine deutliche Reflexion an der Übergangsfläche zeigt, während die Druckhöhe gut mit dem theoretischen Wert übereinstimmt. Für AUTODYN2D sind in der Literatur bislang keine vergleichbaren Profile der Druckverteilung bekannt.

Beide Verfahren sind insofern noch unbefriedigend, als bei der Berechnung der SPH-Summen im netzfreien Gebiet die Einflußbereiche der Partikel an der Trennfläche zu den Elementen abgeschnitten werden. Nur die Kräfte aus den Elementen (bzw. Zellen) werden an die Übergangspartikel weitergegeben, Geschwindigkeitsgradienten werden dagegen nur aus den benachbarten Partikeln berechnet. Dies führt zu einem unsymmetrischen Einflußbereich eines Partikels. Der Fehler ist letztlich in der unterschiedlichen Formulierung des Ansatzverfahrens begründet. Ein Element kann nach außen über den Elementrand alle relevanten Wechselwirkungen austauschen, die Deformationen und Spannungen im Elementinneren werden richtig berechnet (schwache Form). Ein Partikel besitzt Spannungs- und Geschwindigkeitsinformationen am selben Punkt, der Austausch von Wechselwirkungen erfolgt in der starken Form unmittelbar über die Approximation. Die Verwendung der Normalisierung in EPIC vermindert das Problem, beseitigt es jedoch nicht.

Eine Erweiterung dieser Verfahren für dreidimensionale Berechnungen ist bislang nicht bekannt. Insbesondere für dreidimensionale Berechnungen birgt dieser Ansatz Schwierigkeiten, wenn nicht Partikelabstand und Zellgröße gleich groß gewählt werden, da dann das Partikel auf der durch vier Knoten definierten, gekrümmten Element- bzw. Zelloberfläche lokalisiert werden muß.

Kritisch ist auch die Wahl der Masse eines mit einem Knoten zu verknüpfenden Partikels. Beste Ergebnisse mit der SPH-Methode werden im allgemeinen nur erzielt, wenn die Partikel im Ausgangszustand regelmäßig angeordnet und möglichst gleich groß sind. Werden Partikel entlang der Element- oder Zellränder plaziert, überlagern sich an den Knoten Element- und Partikelmasse. Dies führt dazu, daß bei einer Fixierung von Partikeln am Rand des Netzes eine zu hohe Masse entsteht, die zu der im vorangegangenen Abschnitt geschilderten reflektierten Welle führt.

Konvergenzbetrachtungen für diese Form der Kopplung sind bislang nicht bekannt. Die eigene Implementierung dieser Form der Kopplung dient den in Abschnitt 7.3 vorgestellten vergleichenden Untersuchungen der verschiedenen Kopplungsverfahren.

### 7.1.2.3 Eigene Implementierung einer Kopplung durch Fixierung von Partikeln an Knoten

Eine Kopplung durch Fixierung von Partikeln an Knoten kann im Programm auf vergleichsweise einfache Weise geschehen. Die Kopplung erfolgt durch die Zusammenfassung sowohl der Kräfte auf Knoten  $F_K$  und Partikel  $F_P$  als auch ihrer Massen und die Berechnung der gemeinsamen Beschleunigung. Die auf Knoten bzw. Partikel wirkenden Kräfte sind dabei

$$F_K = m_K a_K \quad , \quad F_P = m_P a_P \quad (7.6)$$

Sie können aus den bereits berechneten Beschleunigungen (aus SPH-Summengleichung bzw. Kräften im Element) bestimmt werden. Die Beschleunigung für die vereinigte Masse von

Partikel und Knoten ist dann

$$\mathbf{a}_{K \text{ Kopp}} = \mathbf{a}_{P \text{ Kopp}} = \frac{\mathbf{F}_K + \mathbf{F}_P}{m_K + m_P} \quad (7.7)$$

### 7.1.3 Weitere Möglichkeiten zur Kopplung von Partikeln mit Finiten Elementen

Zwei weitere Verfahren zur Kopplung netzfreier Methoden mit Finiten Elementen sollen in diesem Abschnitt kurz dargestellt werden, weil sie in der Literatur Beachtung gefunden haben und eine Abgrenzung zu den in dieser Arbeit betrachteten Verfahren ermöglicht werden soll. Beide wurden zunächst für netzfreie Methoden, die auf einer Integration mit Hilfe eines Hintergrundnetzes basieren (RKPM und EFG, vgl. Kapitel 3), entwickelt. Sie wurden bislang noch nicht für die Berechnung der in dieser Arbeit betrachteten Impaktprobleme eingesetzt.

#### 7.1.3.1 Modifikation der Ansatzfunktionen

Chen, Uras & Liu (1995) stellten für die Kopplung ihrer RKPM genannten netzfreien Methode mit Finiten Elementen ein Konzept vor, das auf der Modifikation der Ansatzfunktionen bzw. Formfunktionen sowohl für Elemente als auch Partikel basiert. Hierzu wird die Reproduktionsbedingung, die die Konsistenz des netzfreien Verfahrens sicherstellt, auch im Übergangsbereich angewendet. In dem von Chen, Uras & Liu gezeigten Beispiel geschieht dies durch eine Anpassung der Formfunktionen der dem netzfreien Bereich benachbarten Elemente, wie in Abbildung 7.7 dargestellt. Für die von den Autoren betrachteten impliziten Zeitintegrationsverfahren und bei finiten Deformationen ist diese Anpassung der Formfunktionen nur einmalig durchzuführen. In einem Hydrocode müßten sie jedoch in jedem Zeitschritt auf der Grundlage der aktuellen Koordinaten neu berechnet werden; das Verfahren erscheint daher und wegen der zusätzlichen Komplexität, die in den FE-Algorithmus einzuführen wäre, in diesem Fall wenig geeignet und wird im weiteren nicht mehr betrachtet.

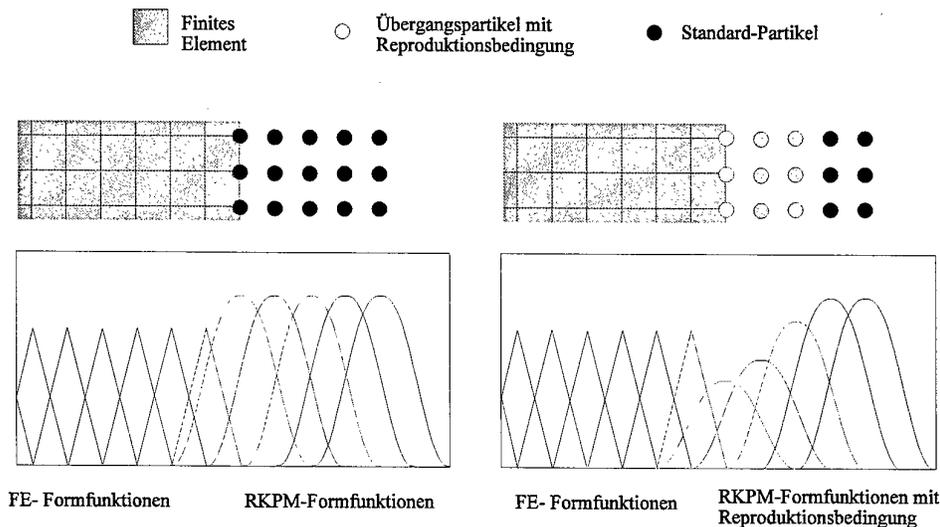


Abbildung 7.7: Kopplung durch Modifikation der Ansatzfunktionen (Chen, Uras & Liu 1995)

### 7.1.3.2 Kopplung durch Rampenfunktionen

Belytschko et al. (1998) verwenden die ursprünglich für die Kopplung der EFG-Methode mit Finiten Elementen entwickelte Kopplung mit Rampenfunktionen auch für Methoden mit knotenweiser Integration. In den in Abbildung 7.8 dargestellten Übergangselementen werden die Ansatzfunktionen  $\Phi_{I,UE}$  aus der Summe der mit dem Wert einer Rampenfunktion  $r$  multiplizierten Ansatzfunktionen für den netzfreien Bereich  $\Phi_I$  und der mit  $1-r$  multiplizierten Formfunktionen des Elementes  $N$  berechnet. Die Rampenfunktion  $r$  ist dabei auf der dem netzfreien Bereich zugewandten Seite der Elemente 0, auf der den übrigen Elementen benachbarten Seite des Übergangselementes 1. Dazwischen erfolgt eine Interpolation mit Hilfe des Parameters  $R$ , der wiederum aus den Formfunktionen des Elements zu ermitteln ist.

$$\begin{aligned}\Phi_{I,UE} &= (1-r(\mathbf{x}))N_I(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})\Phi_I \\ 0 &< r(\mathbf{x}) < 1 \\ r(\mathbf{x}) &= 3R^2(\mathbf{x}) - 2R^3(\mathbf{x}) \\ R(\mathbf{x}) &= \sum_{J \in \Gamma_M} N_J(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{7.8}$$

Das Verfahren hat sich bei statischen und quasistatischen Aufgabenstellungen bewährt. Karutz (2000) zeigt die Konvergenz eines von ihm verbesserten Verfahrens und wendet es für die Kopplung adaptiv aus Elementen erzeugter EFG-Bereiche zur Modellierung der quasistatischen Rißausbreitung an. Es erfordert jedoch eine eigene Klasse von Übergangselementen und damit einen Zwischenschritt bei der in dieser Arbeit behandelten adaptiven Umwandlung von Elementen in SPH-Partikel. Da in einem Hydrocode zudem die Ansatzfunktionen  $\Phi_{I,UE}$  in jedem Zeitschritt neu zu berechnen wären, ähnlich wie bei der Kopplung durch Anpassung der Ansatzfunktionen, erscheint es für eine Kopplung der SPH-Methode mit Finiten Elementen für Impaktberechnungen nicht zweckmäßig.

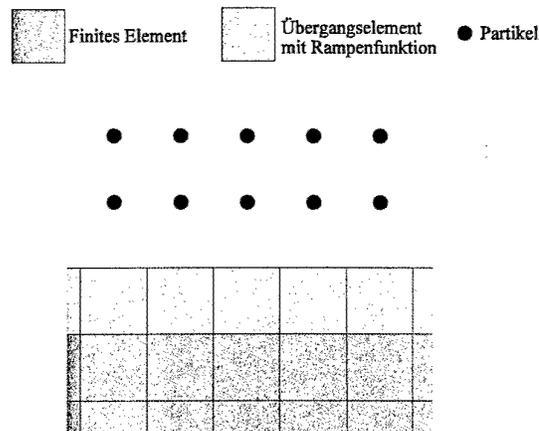


Abbildung 7.8: Kopplung mit Übergangselementen (Belytschko et al., 1998).

## 7.2 Neues Verfahren auf der Basis einer hybriden Approximation

In diesem Abschnitt wird zunächst die Grundidee des entwickelten Verfahrens erläutert. Anders als die bekannten Verfahren basiert es auf der Erweiterung des Approximationsansatzes der SPH-Methode. Daher erfolgt nach der mathematischen Formulierung zunächst eine Veranschaulichung der Ergebnisse bei einer Anwendung der Kopplung als Verfahren zur Näherung einer gegebenen Funktion. Zwei alternative Verfahren zur Berechnung von Reaktionskräften auf Elementknoten ermöglichen eine Kopplung von Partikeln und Elementen für kontinuumsmechanische Aufgabenstellungen.

### 7.2.1 Konzept

Das vorgestellte Konzept basiert auf der Idee, die SPH-Approximation so zu erweitern, daß bei Überschneidung des Einflußbereiches eines Partikels mit einem FE-Bereich die dortigen Feldgrößen mit berücksichtigt werden und in die SPH-Summen einfließen. Die Erweiterung der SPH-Approximation auf Elemente hat verschiedene Vorteile:

- Das Verfahren ist unabhängig vom Verhältnis der Partikelabstände zu Elementseitenlängen, in der adaptiven Berechnung kann ein Element durch eine beliebige, festzulegende Anzahl von Partikeln ersetzt werden.
- Es werden keine besonderen Übergangselemente benötigt, wodurch insbesondere der Einsatz in der adaptiven Berechnung erleichtert wird.
- Die SPH-Summation bleibt immer symmetrisch, das heißt, Partikel im Übergangsbereich sind keine Randpartikel, sondern haben Nachbarn (Elemente oder Partikel) auf beiden Seiten, so daß eine korrekte Berechnung von Geschwindigkeitsgradienten ohne Randeffekte erfolgen kann.
- Hierdurch können dann auch Schubspannungen und Zugspannungen übertragen werden.
- Das Verfahren ist relativ einfach auch für dreidimensionale Berechnungen zu realisieren, da keine geometrischen Kontaktbedingungen benötigt werden.

Der Ansatzpunkt für das Verfahren ist die numerische Volumenintegration (bzw. Summation), die sowohl in der FE-Methode als auch in der SPH-Methode dazu dient, die in den Erhaltungsgleichungen benötigten Gradienten an diskreten Punkten zu berechnen. Wesentlich ist dabei, daß das Integrationsvolumen bei finiten Elementen immer auf das jeweilige Element begrenzt ist. Randbedingungen können dadurch z. B. als äußere Lasten auf Knoten angesetzt werden. Dagegen überschneiden sich bei der SPH-Methode die Integrationsbereiche der einzelnen Partikel ( $2h$ -Radius), der Integrationsbereich eines Partikels ist durch die zu Null werdende Kernel-Funktion nach außen begrenzt.

Da das Integrationsvolumen für ein Partikel immer größer ist als sein „materielles“ Volumen  $m/\rho$ , schneidet der Integrationsbereich eines Partikels in der Nähe eines Finiten Elementes immer das Element, bevor das „materielle“ Volumen in das Element eindringen würde. Wenn nun die Zustandsgrößen für das Partikel berechnet werden, indem der durch das Element belegte Volumenanteil  $\Omega_{FE \cap SPH}$  (Abbildung 7.9) bei der Integration berücksichtigt wird, ist eine vollständige und genaue Beschreibung aus Sicht der Partikel auch für den Übergangsbereich erreicht.

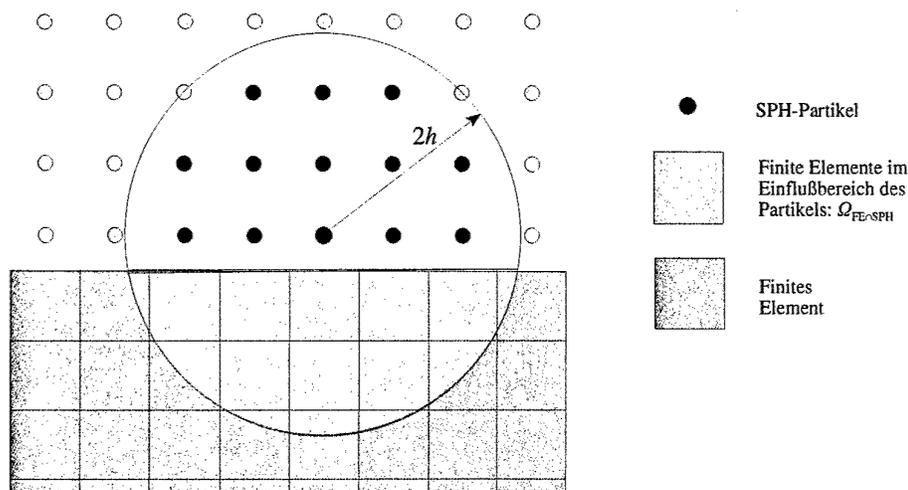


Abbildung 7.9: Konzept der SPH-FE-Kopplung durch Erweiterung der Integration auf Elemente (zweidimensionales Beispiel)

Umgekehrt muß auch für die Finiten Elemente die Einwirkung durch das Partikel realisiert werden. Hierzu kann die beschleunigende Wirkung eines Elementvolumens auf umliegende Partikel betrachtet, den Knoten des Elementes zugeordnet und zu Kräften zusammengefaßt werden. Ein weiterer, im Rahmen dieser Arbeit entwickelter Ansatz ist die Berechnung von Randspannungen aus den Spannungen an SPH-Bereich und deren Zusammenfassung zu Kräften auf die Knoten.

Die Ausdehnung der SPH-Summen auf den FE-Bereich ermöglicht neben der Beschleunigungsberechnung die Berücksichtigung der Geschwindigkeiten im Element bei der Berechnung der Deformationsraten im Partikel. Eine umgekehrte Berücksichtigung der Geschwindigkeiten der Partikel für den Geschwindigkeitsgradienten im Element wird nicht vorgenommen, die Deformationsratenberechnung geschieht nur innerhalb der Elemente selbst aus den Geschwindigkeiten der Knoten.

### 7.2.2 Hybrides Approximationsverfahren

Das hybride Approximationsverfahren wurde zuerst von Sauer & Hiermaier (1999) vorgestellt. Die mathematische Formulierung ist in den folgenden Gleichungen dargestellt. Gleichung 7.9 gibt die allgemeine Form der Berechnung des Näherungswertes einer Funktion  $u$  durch die SPH-Summation über alle Nachbarpartikel und die Erweiterung um ein Integral über die Fläche der benachbarten Elemente an. Die zweite Gleichung zeigt die entsprechende Formulierung für die Berechnung des Gradienten von  $u$ . In Abbildung 7.10 ist die Vorgehensweise für den zwei-dimensionalen Fall in einer Skizze erläutert.

$$u^h_I = \sum_J u_J W(x_J - x_I, h) \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} u_{EI} W(x_{EI} - x_I, h) d\Omega \quad (7.9)$$

$$\nabla u^h_I = - \sum_J u_J \nabla W(x_J - x_I, h) \frac{m_J}{\rho_J} - \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} u_{EI} \nabla W(x_{EI} - x_I, h) d\Omega \quad (7.10)$$

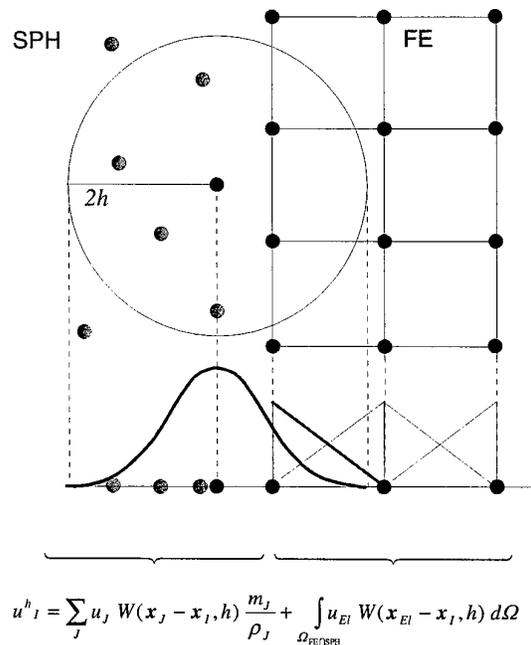


Abbildung 7.10: Erweiterung der SPH-Summation durch Integration auf Elementen (2D), Aufsicht und Schnitt mit Kernel- bzw. Ansatzfunktionen

Während üblicherweise für die Approximation im SPH-Verfahren mit variablem Interpolationsradius der Wert der Kernel-Funktion mit dem Mittelwert der  $h$ -Radien der betrachteten Partikel berechnet wird, kann bei der Kopplung mit Elementen der Approximationsradius des Partikels eingesetzt werden. Der Grund hierfür liegt darin, daß für die Elemente keine eigene Approximation mit Hilfe des SPH-Verfahrens berechnet werden muß, bei der eine Symmetrie zum Einfluß des Elements auf die benachbarten Partikel zu gewährleisten wäre.

Die Integrale über die Elemente in der hybriden Approximation können mit Standard-Integrationsverfahren für Finite Elemente ermittelt werden. Neben der üblichen Gauß-Integration wurde hierzu auch eine einfache Integration mit regelmäßig verteilten Integrationspunkten und gleichmäßiger Gewichtung implementiert. Bei der numerischen Integration der Gleichungen für die hybride Approximation sind für  $u_{EI}$  mit Hilfe der Basisfunktionen des Elements interpolierte Werte an den Integrationspunkten, für  $x_{EI}$  die globalen Koordinaten der Integrationspunkte auf dem Element einzusetzen. Die Anzahl der Integrationspunkte ist variabel, sie kann sich beispielsweise nach der Größe der Überschneidung des Einflußbereichs des Partikels mit dem Element richten. Für ein zweidimensionales, quadrilaterales Element mit  $m \times n$  Integrationspunkten und lokalen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  läßt sich die numerische Integration zur Ermittlung des Beitrags von  $N$  Elementen zur SPH-Summe mit Hilfe der Wichtungskoeffizienten  $w$  und der Determinante der Jacobi-Matrix  $J$  durchführen:

$$\int_{\Omega_{FE \cap SPH}} u(x, y) W(x, y) d\Omega = \sum_N \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j u(\xi_i, \eta_j) W(x_i, y_j) |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (7.11)$$

$$\int_{\Omega_{FE \cap SPH}} u(x, y) \nabla W(x, y) d\Omega = \sum_N \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j u(\xi_i, \eta_j) \nabla W(x_i, y_j) |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (7.12)$$

Die Erweiterung für dreidimensionale Element erfolgt analog durch eine zusätzliche Summation über die dritte lokale Koordinate auf der rechten Seite.

Auf diese Weise können auf einem durch Finite Elemente und Partikel diskretisierten Gebiet im Übergangsbereich Funktionswerte approximiert und Ableitungen berechnet werden. Im folgenden wird anhand einer Beispielfunktion demonstriert, wie Approximationen mit diesem Verfahren im zweidimensionalen durchgeführt werden können. Die Diskussion erfolgt zunächst anhand von Darstellungen der Beispielfunktion als Fläche im Raum, dabei werden zum Vergleich zunächst reine SPH-Approximationen, einmal ohne, einmal mit Normalisierung, sowie die hybride Approximation dargestellt. Anschließend werden die Eigenschaften der Näherungen anhand von Schnitten erläutert.

Als Testfunktion wurde die Funktion  $f(x, y) = -\cos(x^2 + y^2)$  im Bereich  $0 \leq x \leq 2.5$  und  $0 \leq y \leq 2.5$  gewählt, weil an ihr das zweidimensionale Approximationsverhalten bei unterschiedlich großen Gradienten gezeigt werden kann. Die Funktion und ihre Ableitung  $\partial f / \partial y = 2y \cdot \sin(x^2 + y^2)$  sind in Abbildung 7.12 dargestellt. Das betrachtete Gebiet der Größe  $2,5 \times 2,5$  wurde zunächst mit 100 gleichen Partikeln diskretisiert, deren "Masse" jeweils 0,0625 beträgt, so daß die "Dichte" im Gebietsinneren konstant 1 ist. Die Approximationsradien wurden für alle Partikel mit dem 1,5-fachen des Partikelabstandes festgelegt zu  $2h = 0,375$ . In Abbildung 7.11 links ist diese Diskretisierung dargestellt, die Partikel sind als dunkle Kreise, deren Flächeninhalt dem „Volumen“  $m/\rho$  eines Zylinder der Länge 1 entspricht, abgebildet. Die Interpolationsradien sind als dünne Linien dargestellt.

Die Näherungen mit dem "Standard"-SPH-Verfahren für Funktion und Ableitung zeigt Abbildung 7.13. Die dargestellten Oberflächen wurden erzeugt, indem an  $50 \times 50$  Rasterpunkten im Gebiet die Näherungen mit der SPH-Approximation berechnet wurden. Diese Punkte wurden dann als Eingangswerte für die Darstellung im Plotprogramm *gnuplot* verwendet. Neben den Flächen wurden auf der Grundebene Isolinien, hier Linien gleicher genäherter Funktionswerte, erzeugt. Zu erkennen ist, daß beide Näherungen, sowohl für die Funktion als auch für die Ableitung, große Unterschiede zum Original vor allem an den Rändern zeigen: hier ist bei der Summation über die vorhandenen Nachbarn die Konsistenzbedingung ‚nullter‘ Ordnung nicht mehr erfüllt, da auf einer Seite des Randes keine Nachbarn vorhanden sind, die Summe aus Wichtungsfunktion und Partikelvolumen  $m/\rho$  über alle Nachbarn ist ungleich 1.

Die Näherungen für die Beispielfunktion mit dem normalisierten SPH-Verfahren (NSPH) sind in Abbildung 7.14 dargestellt. Das Verhalten an den Rändern ist deutlich verbessert, die Güte der Approximation ist nun noch durch die grobe Diskretisierung und die Tatsache, daß nur lineare Funktionen exakt approximiert werden können (Konsistenz erster Ordnung), begrenzt.

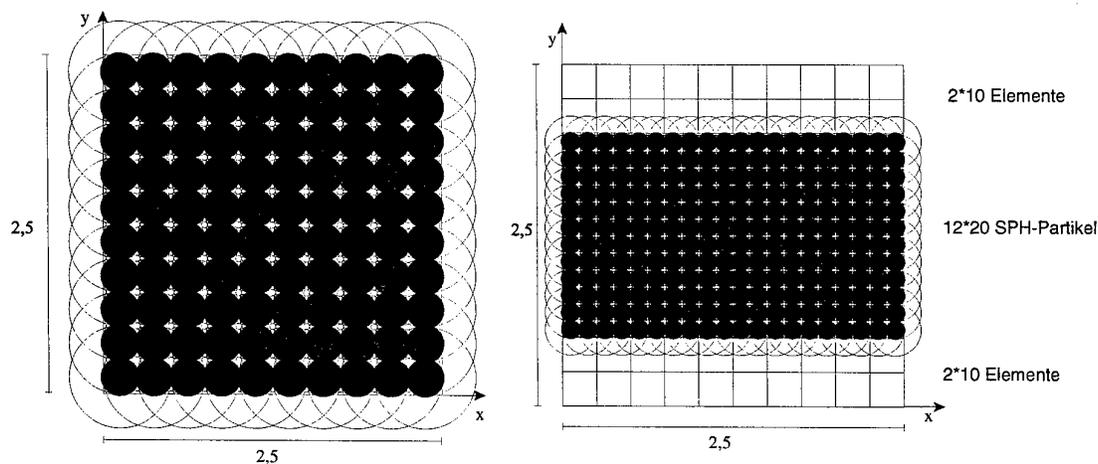


Abbildung 7.11: Diskretisierungen für die Approximation einer Beispielfunktion. Links:  $10 \cdot 10$  Partikel. Rechts: Hybride Approximation mit  $12 \cdot 20$  Partikeln und zwei mal  $2 \cdot 10$  Elementen.

Eine Diskretisierung für die gleiche Approximationsaufgabe mit Partikeln und Elementen ist in der Abbildung 7.11 rechts dargestellt. Um ein von Elementen unbeeinflusstes Gebiet in der Mitte des durch Partikel diskretisierten Bereiches zu erhalten und damit den Übergang zwischen rein SPH-diskretisiertem und mit Elementen diskretisiertem Gebiet zeigen zu können, wurde die Partikeldichte erhöht: das gesamte Gebiet wird jetzt durch 40 Elemente und 240 Partikel abgedeckt.

Abbildung 7.15 zeigt das Ergebnis der Approximation der genannten Funktion, wobei für die Partikel die NSPH-Formulierung verwendet wurde. Zur Berechnung der Integrale auf den

Elementen als Beiträge zu den NSPH-Summen wurden pro Element 16 Integrationspunkte erzeugt. Es wurden die in Kapitel 5 beschriebenen quadrilateralen Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen verwendet, daher verbleiben Sprünge zwischen den Elementen bei der Ableitungsberechnung. Dieses Verhalten ist auch beim Übergang vom SPH-Gebiet auf Elemente zu erkennen, allerdings abgeschwächt, weil die Partikel dieses Verhalten nicht zeigen. Abbildung 7.16 zeigt den Vergleich zwischen Funktionsverlauf (durchgezogene Linien) und der Näherung mit der SPH- (strichliert) bzw. NSPH-Methode (punktirt) in Schnitten bei  $x=0$ ,  $x=0.5$  und  $x=2$ . Auf der rechten Seite ist jeweils die hybride Approximation (HA) dargestellt. Im Schnitt  $x=0$ , der am Rand des Gebietes liegt, ist zu erkennen, daß die Normalisierung eine deutlich verbesserte Approximation erzeugt, die hybride Approximation mit der Standard-SPH-Methode weist sogar Sprünge im Funktionsverlauf auf. Die ungenügende Näherung durch die SPH-Methode an den Rändern ist auch in den beiden anderen Schnitten in den nur mit Partikeln diskretisierten Fällen zu erkennen. Die hybriden Approximationen auf der rechten Seite zeigen, daß die Näherung mit dem NSPH-Verfahren in allen Fällen gute Ergebnisse liefert, für das Standard-SPH-Verfahren gilt das nur im Gebietsinneren. Der lineare Verlauf in den Bereichen  $0 < y < 0.5$  und  $2 < y < 2.5$  ist durch die lineare Approximation in den quadrilateralen Elemente bedingt. Die bessere Näherung der Funktion in der Mitte des Gebietes ist auf die gewählte höhere Partikeldichte bei der hybriden Approximation zurückzuführen.

In Abbildung 7.17 sind die entsprechenden Näherungen für den Gradienten der Beispielfunktion in  $y$ -Richtung dargestellt. Der Schnitt bei  $x=0$  zeigt die auch für den Gradienten schlechtere Approximation durch die Standard-SPH-Methode im Randbereich. Da die quadrilateralen Elemente für Schnitte in der Richtung des zu berechnenden Gradienten nur konstante Werte liefern, zeigen die hybriden Approximationen in den betroffenen Bereichen einen treppenartigen Verlauf. Die hybride Approximation ist in der Lage, auch im Übergangsbereich eine stetige Näherung zu erzeugen.

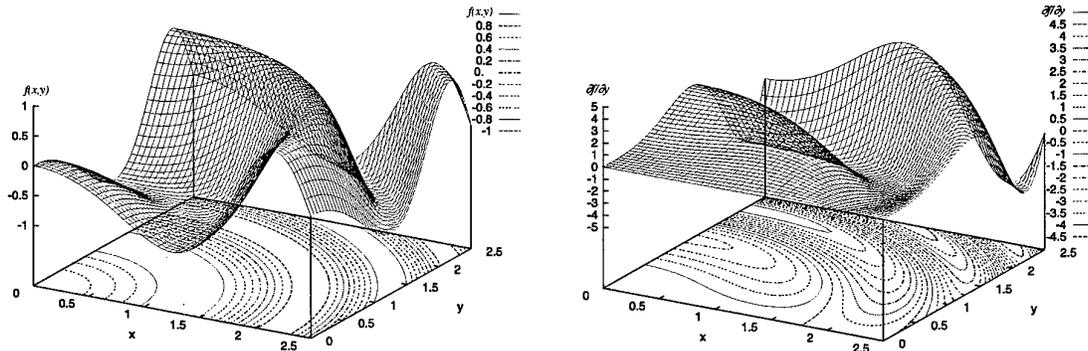


Abbildung 7.12: Testfunktion  $f(x,y)=-\cos(x^2+y^2)$  links, Ableitung  $\partial f/\partial y$  rechts

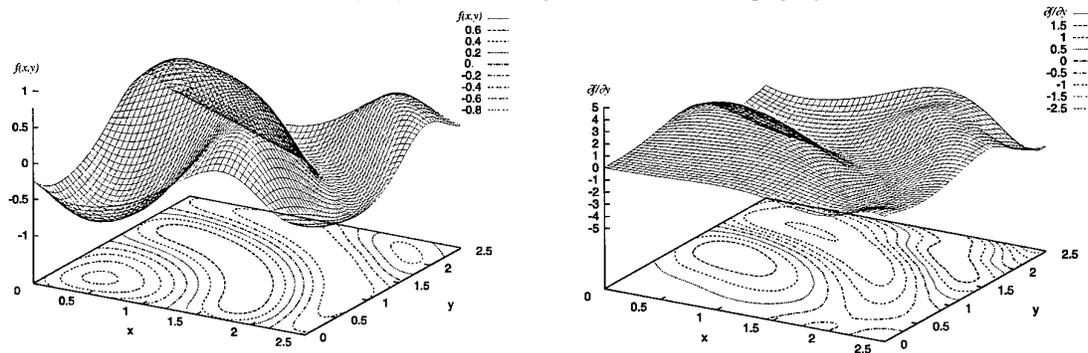


Abbildung 7.13: Approximationen von Testfunktion und Ableitung mit SPH

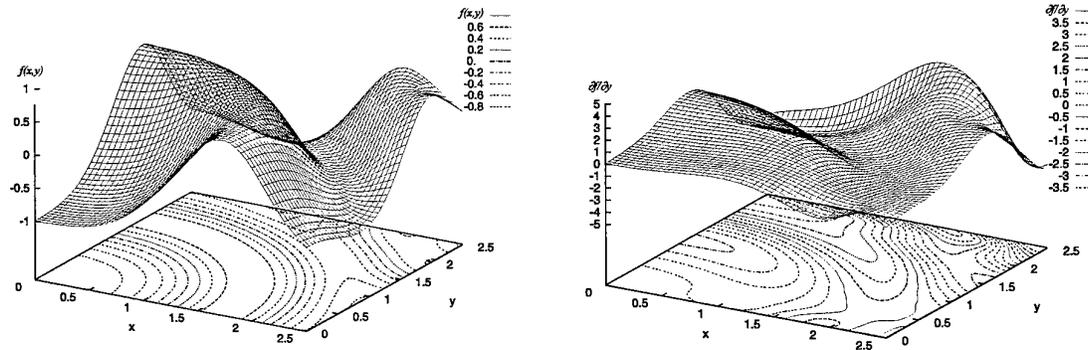


Abbildung 7.14: Approximationen von Testfunktion und Ableitung mit NSPH

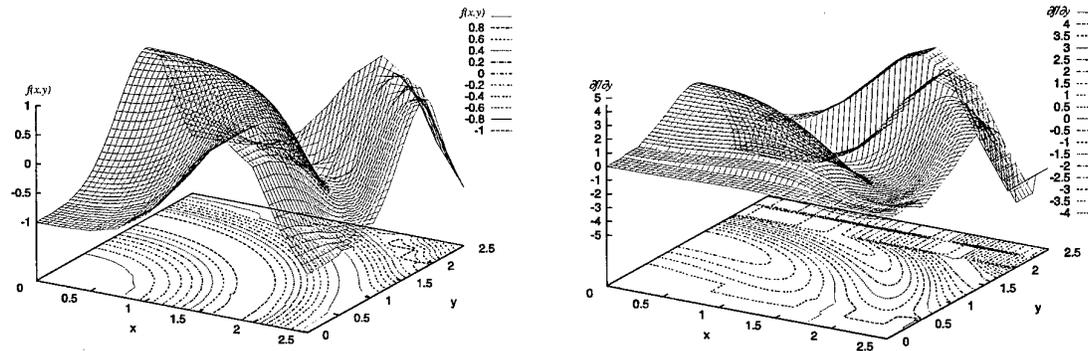


Abbildung 7.15: Approximationen mit NSPH-FE-Kopplung

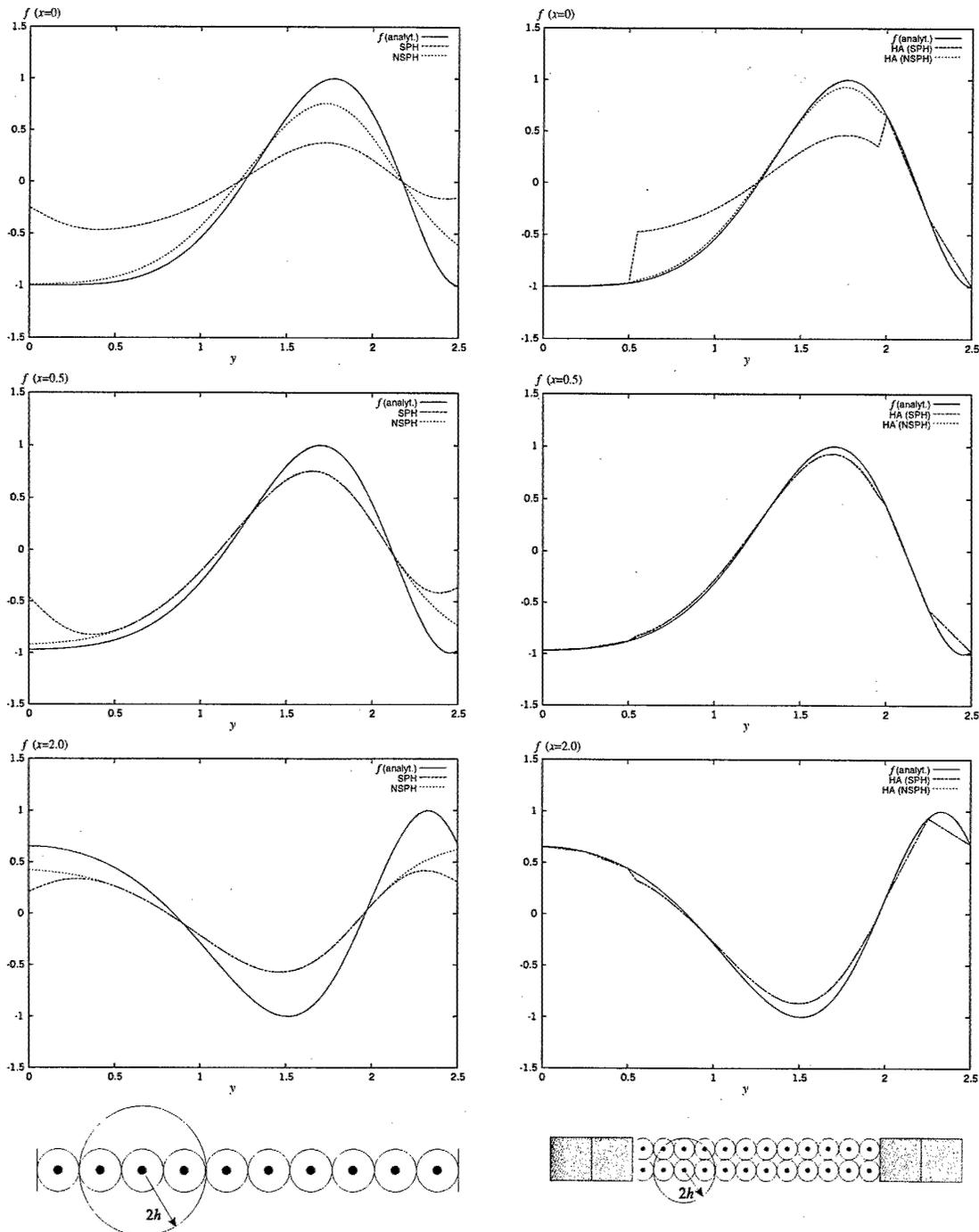


Abbildung 7.16: Vergleich zwischen Funktion und approximierten Funktionsverläufen in Schnitten parallel zur  $x$ -Achse. Links: reine SPH- bzw. NSPH-Approximation mit 10 Partikeln in  $y$ -Richtung, rechts hybride Approximation mit 2 Elementen, 12 Partikeln und nochmals 2 Elementen in  $y$ -Richtung.

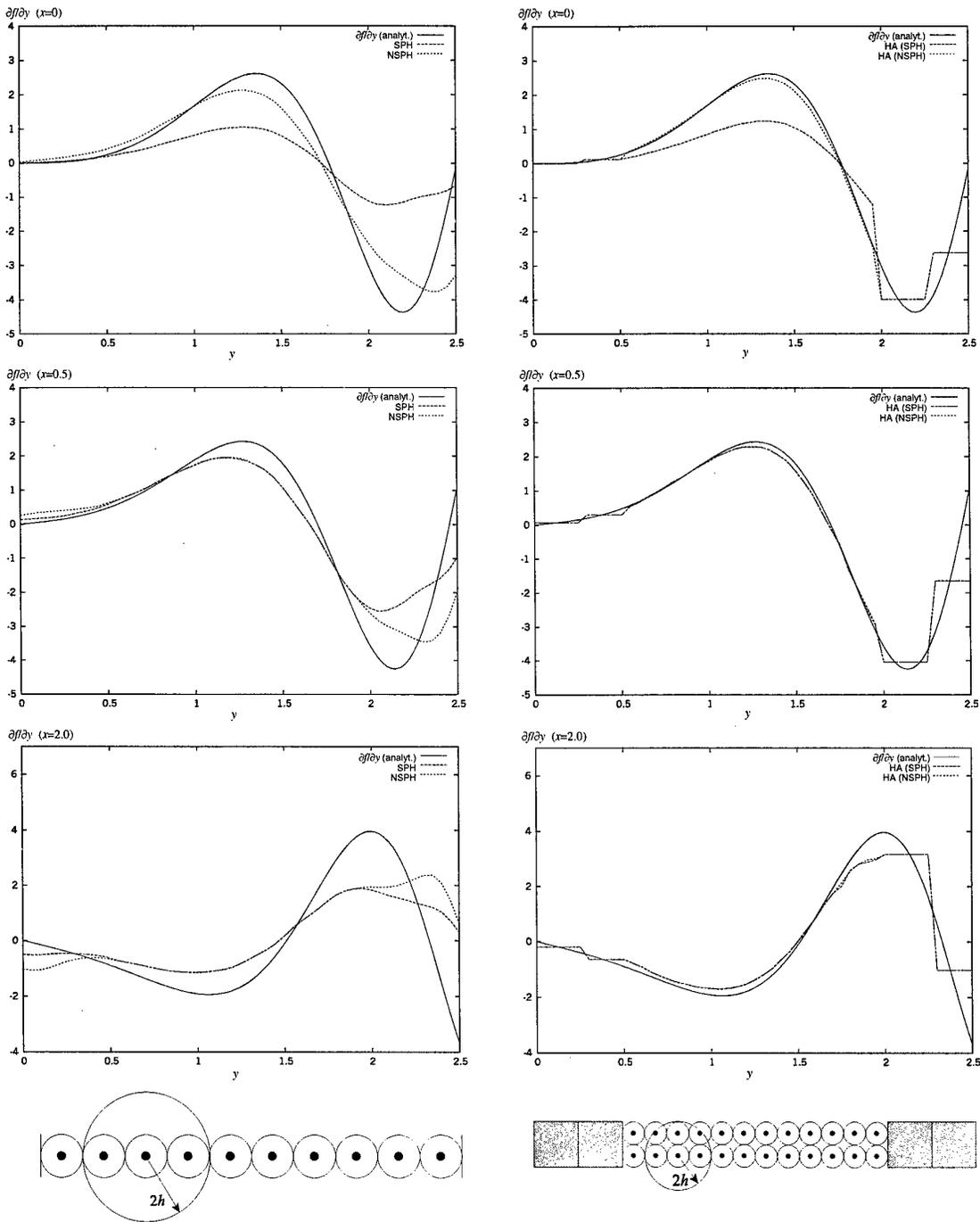


Abbildung 7.17: Vergleich zwischen dem Gradienten der Funktion und dem approximierten Gradienten in Schnitten parallel zur  $x$ -Achse. Links: reine SPH- bzw. NSPH-Approximation mit 10 Partikeln in  $y$ -Richtung, rechts hybride Approximation mit 2 Elementen, 12 Partikeln und nochmals 2 Elementen in  $y$ -Richtung.

### 7.2.3 Hybride Formen der Erhaltungsgleichungen

Mit der Erweiterung um die Integrale auf Elementflächen erhalten die Summengleichungen des SPH-Verfahrens und die Approximation des Geschwindigkeitsgradienten die in den folgenden Gleichungen dargestellte Form. In den Gleichungen sind Größen des betrachteten Partikels durch den Index  $I$ , Größen der Nachbarpartikel durch  $J$  und Werte auf den Elementen mit dem Index  $El$  gekennzeichnet. Die Geschwindigkeiten werden dabei aus den Knotenwerten des Elements mit Hilfe der bilinearen Ansatzfunktionen interpoliert. Für die Spannungen wird - konsistent mit der Annahme konstanter Spannungen in den verwendeten Elementen - der Wert am Integrationspunkt eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_I}{dt} &= \rho_I \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \cdot \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\mathbf{v}_{El} - \mathbf{v}_I) \cdot \nabla W d\Omega \right) \\
 \frac{d\mathbf{v}_I}{dt} &= -\frac{1}{\rho_I} \left( \sum_J (\boldsymbol{\sigma}_J + \boldsymbol{\sigma}_I) \cdot \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\boldsymbol{\sigma}_{El} + \boldsymbol{\sigma}_I) \cdot \nabla W d\Omega \right) \\
 \frac{d\boldsymbol{\epsilon}_I}{dt} &= -\frac{1}{\rho_I} \boldsymbol{\sigma}_I : \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\mathbf{v}_{El} - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W d\Omega \right) \\
 \nabla \mathbf{v}_I &= - \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\mathbf{v}_{El} - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W d\Omega \right)
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Die in Kapitel 6 dargestellte Normalisierung erfordert die Berechnung der Matrix  $\mathbf{B}$ , die ebenfalls unter Berücksichtigung der Integrale auf Elementen erfolgen kann:

$$\mathbf{B} = \left( - \sum_J (\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} - \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\mathbf{x}_{El} - \mathbf{x}_I) \otimes \nabla W d\Omega \right)^{-1} \tag{7.14}$$

Damit ergeben sich für das NSPH-Verfahren in der Kopplung mit Elementen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_I}{dt} &= \rho_I \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\mathbf{v}_{El} - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W d\Omega \right) \cdot \mathbf{B} \\
 \frac{d\mathbf{v}_I}{dt} &= -\frac{1}{\rho_I} \left( \sum_J (\boldsymbol{\sigma}_J + \boldsymbol{\sigma}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\boldsymbol{\sigma}_{El} + \boldsymbol{\sigma}_I) \otimes \nabla W d\Omega \right) \cdot \mathbf{B} \\
 \frac{d\boldsymbol{\epsilon}_I}{dt} &= -\frac{1}{\rho_I} \boldsymbol{\sigma}_I : \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\mathbf{v}_{El} - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W d\Omega \right) \cdot \mathbf{B} \\
 \nabla \mathbf{v}_I &= - \left( \sum_J (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W \frac{m_J}{\rho_J} + \int_{\Omega_{FE \cap SPH}} (\mathbf{v}_{El} - \mathbf{v}_I) \otimes \nabla W d\Omega \right) \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

### **7.2.4 Berechnung der Kraft auf Elementknoten und globale Impulserhaltung**

Wie bereits erwähnt, ist die SPH-Methode ein Kollokationsverfahren, bei dem an jedem einzelnen Stützpunkt bzw. Partikel der Fehler in der Approximation minimiert wird. Durch die vorgeschlagene Kopplung wird die Kollokation so erweitert, daß auch Finite Elemente einen Beitrag für die Näherung im SPH-Bereich leisten können. Die Berechnungen für die Finiten Elemente selbst basieren jedoch auf der Integration über ein Kontrollvolumen (sog. „schwachen Form“ der Differentialgleichungen), das durch die Elementränder begrenzt ist und nicht erweitert werden kann. Einflüsse von außerhalb des mit Elementen diskretisierten Bereichs können nur über Randbedingungen berücksichtigt werden. Zwei Verfahren für die Ermittlung dieser Randbedingungen zur Kopplung mit der SPH-Methode werden in diesem Abschnitt erläutert.

#### **7.2.4.1 Berechnung von Knotenkräften aus den Spannungen im SPH-Bereich**

Eine naheliegende Möglichkeit zur Berechnung der Knotenkräfte besteht in der Ermittlung von Spannungstensors aus dem SPH-Bereich und deren Projektion als Spannungsvektoren auf den Rand des FE-Gebietes. Das Verfahren wurde für zweidimensionale Berechnungen realisiert. Diese Variante der Kopplung wird im folgenden als HA-S-Kopplung bezeichnet.

Zur Berechnung der Spannungsvektoren sind zunächst Spannungswerte der mit den Elementen interagierenden Partikel an den Knoten zu approximieren. Idealerweise ist dies mit dem Approximationsansatz des (normalisierten) SPH-Verfahrens selbst durchzuführen (vgl. Abbildung 7.18). Es kann jedoch auch eine andere Form der Wichtung, beispielsweise mit dem reziproken Abstand der Partikel vom Knoten in einer festzulegenden Potenz genutzt werden. Durch Wahl einer hohen Potenz werden die Spannungen des dem Knoten nächsten Partikels am höchsten gewichtet, mit zunehmender Entfernung werden die Wichtungsfaktoren schnell sehr klein.

Die an den Knoten berechneten Randspannungen sind dann noch in Kräfte auf die Knoten umzuwandeln. Die Randspannungen werden dabei, wie in der folgenden Abbildung dargestellt, den halbierten, jeweils links und rechts des Knoten liegenden Randsegmenten zugewiesen. Durch Multiplikation des Spannungstensors mit der Fläche (bzw. der Länge) der Segmente und den Normalenvektoren auf die Segmente werden Kräfte berechnet, die dann auf die Knoten angesetzt werden. Die Kraftrichtungen hängen allein vom Spannungstensor ab, es werden sowohl Normal- als auch Schubspannungen berechnet.

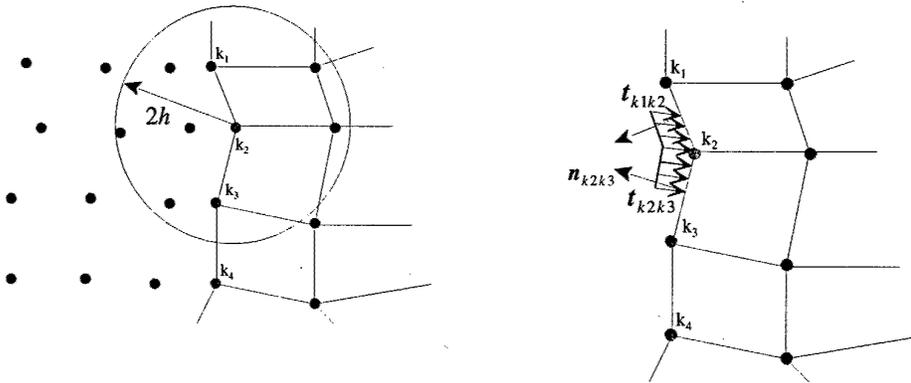


Abbildung 7.18: Berechnung der Randkräfte auf Knoten, HA-S Kopplung.

$$\sigma_{k2} = \frac{\sum_J \sigma_J W(x_J - x_1, h) \frac{m_J}{\rho_J}}{\sum_J W(x_J - x_1, h) \frac{m_J}{\rho_J}} \quad \begin{aligned} t_{k1k2} &= n_{k1k2} \cdot \sigma_{k2} \\ t_{k2k3} &= n_{k2k3} \cdot \sigma_{k2} \\ F_2 &= \frac{l_{12}}{2} t_{k1k2} + \frac{l_{23}}{2} t_{k2k3} \end{aligned} \quad (7.16)$$

An welchen Randknoten durch die Interaktion mit benachbarten Partikeln Randspannungen zu ermitteln sind, wird durch eine Zuordnung der Integrationspunkte zu den nächstgelegenen Knoten entschieden (Abbildung 7.19). Besondere Maßnahmen sind zu treffen, um an „Ecken“ des FE-Netzes keine fehlerhaften Randspannungen zu erzeugen. Hierzu wurde ein Sichtbarkeitskriterium entwickelt, das überprüft, ob die Verbindungslinie zwischen Partikel und dem Knoten, dem der betrachtete Integrationspunkt zugeordnet wird, die Randlinie schneidet. Wenn dies der Fall ist, liefert das Partikel keinen Beitrag zum gemittelten Spannungstensor an diesem Punkt.

Das geschilderte Verfahren für die Kopplung von Elementen und Partikeln hat den Nachteil, daß die Impulserhaltung nicht zwangsläufig gewährleistet ist, denn die Beiträge der Elemente für die Beschleunigungsberechnung der benachbarten Partikel stehen nicht unbedingt im Gleichgewicht mit den an den Knoten ermittelten und über den Elementrand integrierten Randspannungen. Insbesondere bei unregelmäßiger Elementgeometrie kann dies zu Fehlern führen. Die Komplexität des Verfahrens erhöht sich außerdem für den dreidimensionalen Fall, insbesondere die Implementierung eines Sichtbarkeitskriteriums würde sehr aufwendig. Das im nächsten Abschnitt vorgeschlagene Verfahren weist diese Nachteile nicht auf.

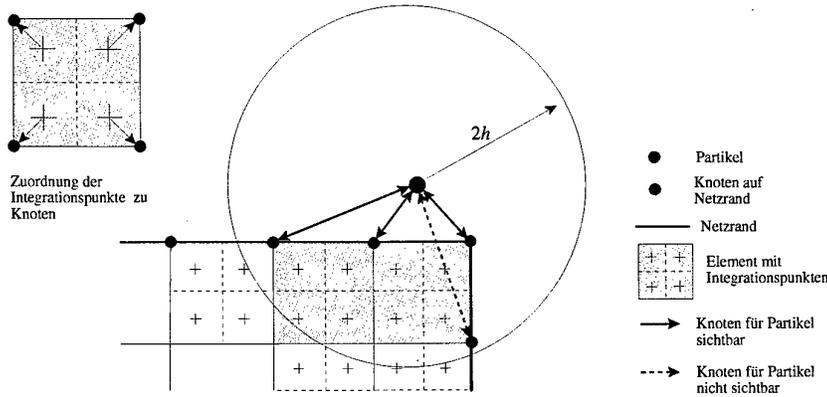


Abbildung 7.19: Sichtbarkeitskriterium zur Überprüfung des Beitrags eines Partikels zur Randspannung an einem Knoten

#### 7.2.4.2 Kräfte auf Knoten aus den Beiträgen in den SPH-Summengleichungen

Eine zweite Möglichkeit der Ermittlung der Kräfte auf die Knoten ist, die Beiträge der Elemente zur Beschleunigungsberechnung unmittelbar zur Berechnung von Kräften auf die Knoten zu verwenden. Diese Beiträge können wiederum aus den einzelnen Beiträgen der Integrationspunkte der Elemente zur numerischen Integration ermittelt werden. In der folgenden Gleichung ist  $w_{GP}$  der Gewichtungsfaktor der numerischen Integration für den betrachteten Integrationspunkt,  $J$  ist die Jacobi-Matrix am Integrationspunkt.

$$\left( \frac{dv_I}{dt} \right)_{GP} = -w_{GP} \det J_{GP} \left( (\sigma_{ElGP} + \sigma_I) \cdot \nabla W \right) \quad (7.17)$$

Dieser Ausdruck, mit der Partikelmasse  $m_I$  multipliziert, kann als aus dem Elementvolumen auf das Partikelvolumen einwirkende Kraft interpretiert werden, die als Reaktionskraft anzusetzen ist.

$$F_{GP} = m_I w_{GP} \det J_{GP} \left( (\sigma_{ElGP} + \sigma_I) \cdot \nabla W \right) \quad (7.18)$$

Eine ähnliche Formulierung ist für das NSPH-Verfahren möglich. Hier ist der Beitrag eines Integrationspunktes zur Beschleunigung des Partikels

$$\left( \frac{dv_I}{dt} \right)_{GP} = -w_{GP} \det J_{GP} \left( (\sigma_{ElGP} + \sigma_I) \otimes \nabla W \right) : B \quad (7.19)$$

Daraus ergibt sich der folgende Ausdruck für die Reaktionskraft.

$$F_{GP} = m_I w_{GP} \det J_{GP} \left( (\sigma_{ElGP} + \sigma_I) \otimes \nabla W \right) : B \quad (7.20)$$

Die künstliche Viskosität wurde in den Gleichungen der Übersichtlichkeit halber weggelassen, sie kann jedoch in gleicher Weise wie für die SPH-Methode selbst verwendet werden. Bei der Berechnung der „Bond“-Viskosität wird dabei der Integrationspunkt mit dem ihm zugeordneten Volumen wie ein Partikel betrachtet. Da hierbei ein mittlerer Approximationsradius  $h_{II}$  zu

verwendet ist, wird ein solcher Radius aus dem dem Integrationspunkt zugeordneten Volumen bestimmt.

Die für die Integrationspunkte ermittelten Kräfte werden den jeweils nächstliegenden Knoten zugeordnet, wie in Abbildung 7.20 dargestellt. Dieses Verfahren beinhaltet eine Näherung, da hierdurch die Kräfte verschoben werden. Die Erhaltung des linearen Impulses wird hiervon jedoch nicht berührt, durch die symmetrische Betrachtung der Wechselwirkung zwischen Partikeln und Elementen in Form der Kräfte ist sie automatisch erfüllt.

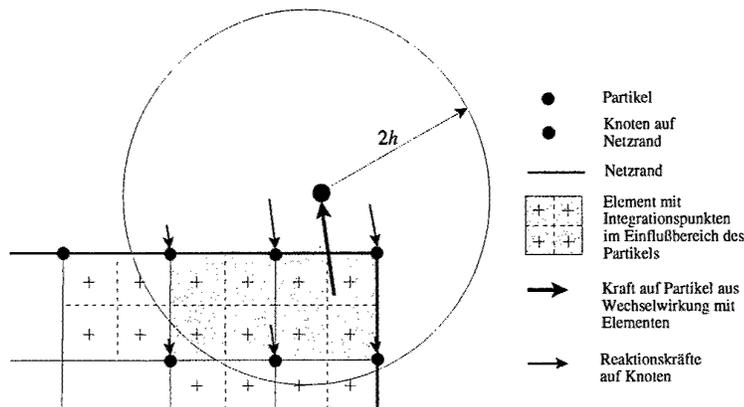


Abbildung 7.20: Zuordnung der Kräfte aus der Wechselwirkung mit einem Partikel (HA-F-Kopplung)

Die Vorteile dieses Verfahrens liegen insbesondere in seiner Robustheit. Da keine Randlinien oder -Flächen betrachtet werden, ist es unempfindlich gegenüber Veränderungen der Elementgeometrie und in gleicher Weise unmittelbar für eine Kopplung mit dreidimensionalen Elementen zu verwenden.

### 7.3 Vergleich der Kopplungsverfahren

Als Testfall für den numerischen Vergleich der Kopplungsverfahren wurde die Ausbreitung einer eindimensionalen Welle in einem ideal-elastischen, 100 cm langen Stab im einachsigen Verzerrungszustand gewählt. Die gewählten Materialparameter sind mit  $K=159000 \text{ N/mm}^2$  und  $G=81800 \text{ N/mm}^2$  sowie einer Dichte von  $\rho=7.83 \text{ g/cm}^3$  die eines üblichen Stahls im elastischen Bereich.

Die Welle wird durch eine Geschwindigkeitsrandbedingung mit  $v=0.01 \text{ cm}/\mu\text{s}$  erzeugt, die bei  $0 \mu\text{s}$  aktiviert und nach  $35 \mu\text{s}$  deaktiviert wird. Die analytische Lösung dieses Problems ist eine Rechteckwelle, die sich mit der elastischen Wellengeschwindigkeit im einachsigen Verzerrungs-

zustand  $c_L=0.585 \text{ cm}/\mu\text{s}$  fortplant. An einem freien Ende wird die Druckwelle zunächst als Zugwelle reflektiert, erreicht diese wieder das freie Ende, an dem die Welle erzeugt wurde, wird sie als Druckwelle reflektiert.

Eine der im folgenden untersuchten Diskretisierungen des Problems ist schematisch in Abbildung 7.21 dargestellt. Ausgangspunkt für alle verwendeten Diskretisierungen ist ein FE-Netz aus quadratischen Elementen mit einer Seitenlänge von 1 cm. Es besteht aus 10 Elementen in  $y$ -Richtung und 100 Elementen in  $x$ -Richtung. Dieses Netz wurde in der Mitte geteilt, anschließend wurde eines der Teilnetze in Partikel umgewandelt. Dabei wurden unterschiedlich hohe Auflösungen im SPH-Bereich verwendet, die Kennzeichnung erfolgt im folgenden durch die Anzahl der Partikel pro Elementseite, so bedeutet beispielsweise „1:2“ eine Verwendung von 2 Partikeln pro Elementseite bzw. 4 Partikeln pro Element. Wurde nur das linke Teilnetz durch Partikel ersetzt, wird als Bezeichnung „SPH-FE“ verwendet, wurde das rechte Teilnetz umgewandelt, wird die Diskretisierung durch „FE-SPH“ gekennzeichnet. Bei Einsatz der Normalisierung lautet die Bezeichnung entsprechend „NSPH-FE“. Zu Vergleichszwecken wurden auch Rechnungen durchgeführt, in denen das gesamte Netz in Partikel umgewandelt wurde, sie sind entsprechend mit „SPH“ bzw. „NSPH“ benannt.

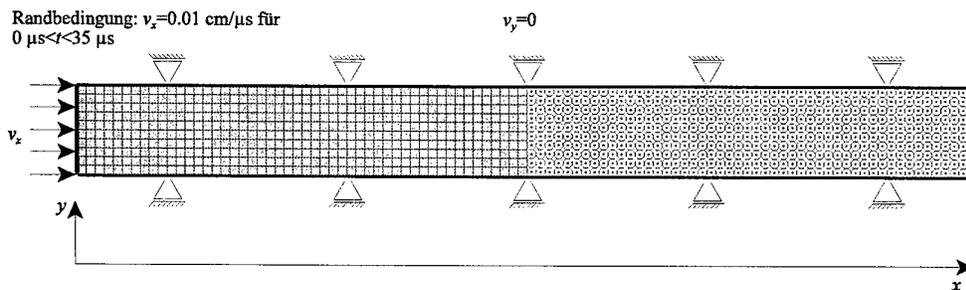


Abbildung 7.21: Diskretisierung des Stahlstabes für die Berechnung des Wellenausbreitungsproblems mit einer Kopplung von FE und SPH (1:1)

Die folgenden Kopplungsvarianten werden untersucht:

- MS: Master-Slave-Verfahren (Abschnitt 7.1.1)
- FIX: Kopplung mit Übergangselementen (Partikel werden auf dem Rand des FE-Gebietes fixiert) (Abschnitt 7.1.2), bei diesem Verfahren kann prinzipiell nur mit einer Partikeldichte (ein Partikel/Elementknoten) gerechnet werden
- HA-S: Hybride Approximation mit Berechnung der Kräfte auf Elementknoten aus Randspannungen (Abschnitt 7.2.4.1)
- HA-F: Hybride Approximation mit Berechnung der Kräfte auf Elementknoten aus den Beiträgen in den SPH-Summengleichungen (Abschnitt 7.2.4.2)

Für die Standard-SPH-Methode wurde ein Interpolationsradius von  $h=1.5 \cdot \text{Partikelabstand}$ , für

das normalisierte SPH-Verfahren (NSPH) ein Interpolationsradius von  $h=1.25 \cdot \text{Partikelabstand}$  verwendet.

### 7.3.1 Vergleich der Geschwindigkeitsprofile

In den folgenden Abbildungen sind Diagramme der berechneten Geschwindigkeitsprofile nach  $128.18 \mu\text{s}$  dargestellt. Die Welle hat in der analytischen Lösung zu diesem Zeitpunkt  $x=75 \text{ cm}$  erreicht und die Schnittstelle der Kopplung bei  $x=50 \text{ cm}$  vollständig überschritten.

Abbildung 7.22 zeigt zunächst die reine FE-Lösung. Da die künstliche Viskosität nur bei Kompression verwendet wird, sind hinter der Welle die typischen Oszillationen zu beobachten.

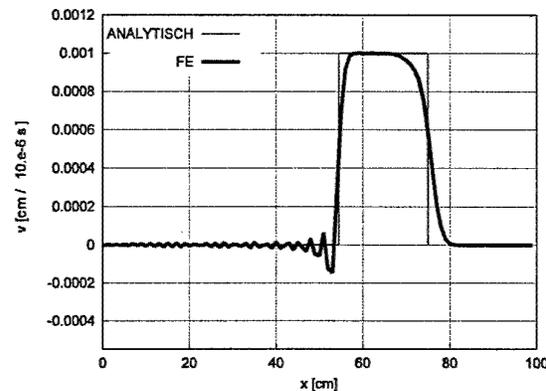


Abbildung 7.22: Ausbreitung einer elastischen Welle. Geschwindigkeitsprofil nach  $100 \mu\text{s}$  bei reiner FE-Diskretisierung

Abbildung 7.23 präsentiert das Ergebnis für den vollständig mit Partikeln (SPH) diskretisierten Stahl. Die Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Partikeldichten zeigen deutlich, daß die Auflösung der Welle mit höherer Partikeldichte bzw. kleineren Partikeln besser wird. Werden 3 Partikel pro Elementseite erzeugt („SPH 3“), ist das Ergebnis mit dem Ergebnis der FE-Rechnung vergleichbar. Die rechte Seite der Abbildung gibt die allein mit der NSPH-Methode berechneten Geschwindigkeitsprofile wieder. Neben 3 verschiedenen Auflösungsstufen wurde auch eine Berechnung mit einem verminderten Interpolationsradius ( $h=0.75 \text{ cm}$ ) und der größten Auflösung (NSPH 1) durchgeführt, die eine steilere Wellenfront gegenüber dem höheren Interpolationsradius ( $h=1.25 \text{ cm}$ ) erzeugt.

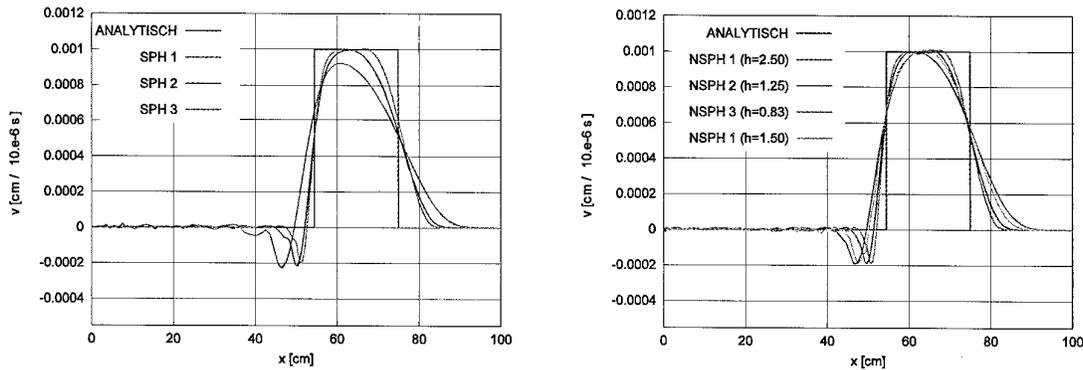


Abbildung 7.23: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach  $100 \mu\text{s}$  bei reiner SPH-Diskretisierung (links) und mit normalisiertem SPH-Verfahren (rechts).

In Abbildung 7.24 sind Ergebnisse der Master-Slave-Kopplung zu sehen. Im rechten Diagramm ist das linke Teilgebiet in Partikel umgewandelt worden (1 Partikel/Element), daher ist die Welle so „verschmiert“ wie in Abbildung 7.23 bei der entsprechenden Auflösung. Deutlich ist in Diagramm D zu erkennen, daß die Oszillationen hinter der Welle durch die Kopplung verstärkt werden, eine kleine Welle wird an der Grenzfläche reflektiert und läuft in das FE-Gebiet zurück. Diese Effekte treten anscheinend unabhängig von der Partikeldichte auf.

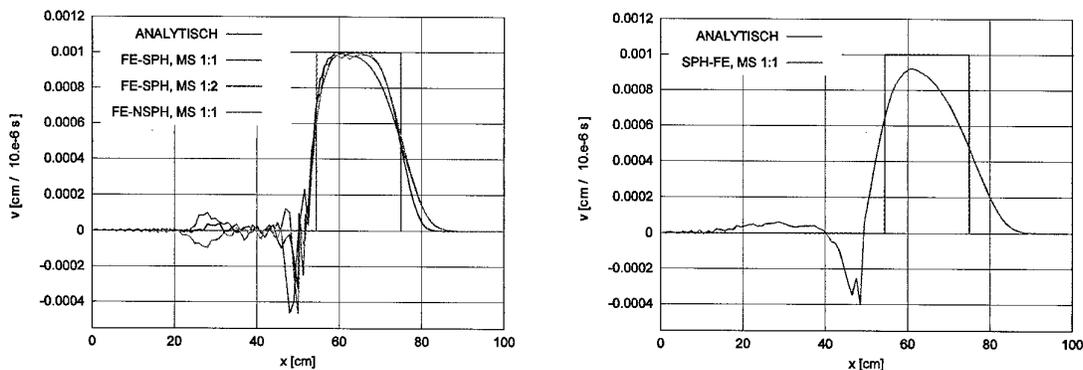


Abbildung 7.24: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach  $100 \mu\text{s}$  bei Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Links: Welle läuft aus dem FE-Bereich in den SPH-Bereich, rechts: Welle läuft aus dem SPH- in den FE-Bereich. Die Grenzfläche liegt jeweils bei  $x=50 \text{ cm}$ .

Abbildung 7.25 zeigt das Ergebnis der Kopplung mit Übergangselementen und Fixierung der Partikel an den Elementknoten, wobei das rechte Teilgebiet in Partikel umgewandelt wurde. Die Partikelgeschwindigkeit in der Welle wird offensichtlich durch die Kopplung vermindert, die Oszillationen hinter der Welle sind vergleichbar mit den bei der Master-Slave-Kopplung auftretenden.

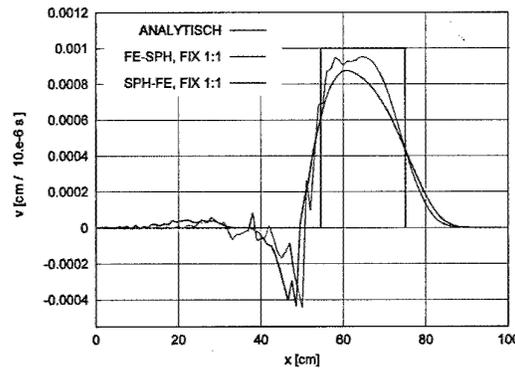


Abbildung 7.25: Geschwindigkeitsprofile nach  $100 \mu\text{s}$  bei Kopplung mit Übergangselementen. Die Welle läuft aus dem FE-Bereich in den SPH-Bereich, die Grenzfläche liegt bei  $x=50 \text{ cm}$ .

In Abbildung 7.26 links sind die Ergebnisse für die in der vorliegenden Arbeit eingeführte Hybride Approximation mit Berechnung der Kräfte auf Elementknoten aus den Spannungen (HA-S) an den Partikeln dargestellt, die Abbildungen 7.26 rechts und 7.27 zeigen Geschwindigkeitsprofile für die HA-F-Variante des Verfahrens. In allen Fällen wird die vorgegebene Partikelgeschwindigkeit von  $0.01 \text{ cm}/\mu\text{s}$  erreicht. Die Oszillationen hinter der Welle sind im Vergleich mit den anderen Kopplungsvarianten (MS bzw. FIX) geringer, die HA-F-Kopplung zeigt zusätzlich kleine Schwankungen der Geschwindigkeit in der Welle selbst. Auffällig ist, daß die Oszillationen hinter der Welle im Fall der Kopplung mit der NSPH-Methode, ganz ähnlich den in Abbildung 7.22 (reine FE-Rechnung) zu beobachtenden scheinen und sich bei höherer Partikelauflösung kaum verändern. Sie werden offensichtlich allein aus der FE-Diskretisierung eingetragen. Reflektierte Wellen sind in der HA-S-Variante zu beobachten, bei der HA-F-Variante nur bei der größten Auflösung (1:1). In Abbildung 7.27 rechts läuft die Welle wie in Abbildung 7.24 rechts aus dem SPH in den FE-Bereich, allerdings wurde hier eine höhere Partikeldichte gewählt. Die Kopplung mit der Hybriden Approximation zeigt hier ein von der zum Vergleich im Diagramm dargestellten reinen SPH-Rechnung praktisch nicht zu unterscheidendes Geschwindigkeitsprofil.

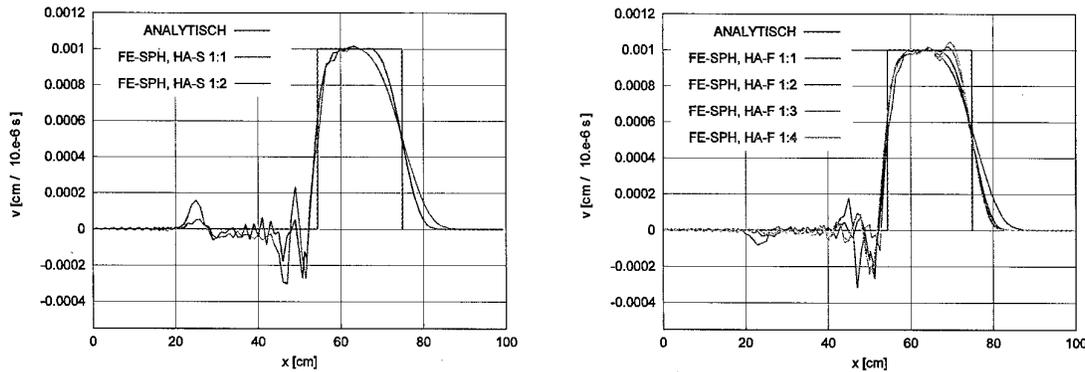


Abbildung 7.26: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach  $100 \mu\text{s}$  bei Kopplung mit den neuen Verfahren HA-S (links) und HA-F (rechts). Die Welle läuft in beiden Fällen aus dem FE-Bereich (0 bis 50 cm) in den SPH-Bereich (50 bis 100 cm).

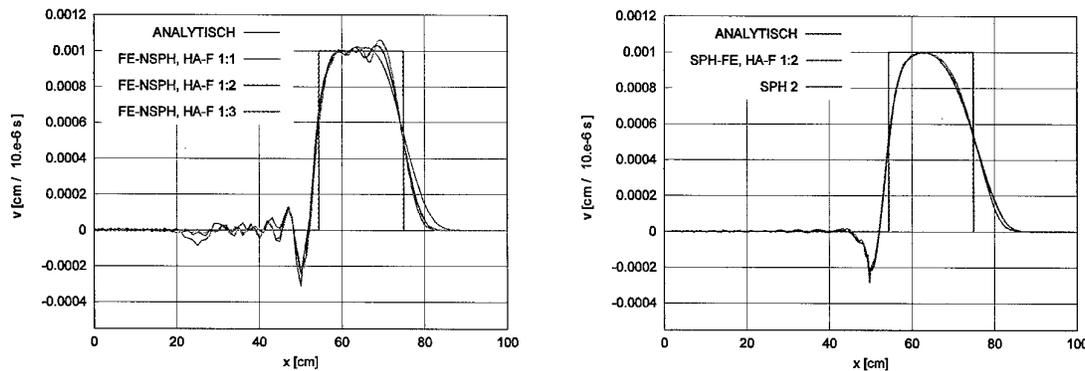


Abbildung 7.27: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nach  $100 \mu\text{s}$  bei Kopplung mit dem neuen Verfahren HA-F. Links: Kopplung mit dem normalisierten SPH-Verfahren, die Welle läuft aus dem FE-Bereich in den SPH-Bereich. Rechts: ohne Normalisierung, die Welle läuft aus dem SPH- in den FE-Bereich.

### 7.3.2 Vergleich der Druckentwicklung

Wie Gebbeken & Ruppert (1999) in ihrem Beitrag zur Verlässlichkeit von Berechnungen mit Hydrocodes betonen, ist bei Finiten Elementen, die auf der Basis der Verschiebungsmethode formuliert wurden, die Konvergenz der Verschiebungen (bzw. ihrer zeitlichen Ableitung, also letztlich der Geschwindigkeit) besser als die Konvergenz der zugehörigen räumlichen Ableitung, also beispielsweise der Deformationsraten. Da aus den Deformationsraten über die Materialgesetze der Druck und die deviatorischen Spannungen berechnet werden, ist die Konvergenz in Druck oder Spannung eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Gesamtberechnung, während die Konvergenz in der Geschwindigkeit nur eine notwendige Bedingung darstellt.

Um die Beeinflussung der Druckentwicklung durch unterschiedliche Varianten der Kopplung von SPH und FE beurteilen zu können, wurde während der bereits geschilderten Wellenausbreitungsberechnung an zwei Stellen der Druck in jedem Zeitschritt (von  $t=0$  bis  $t=500 \mu\text{s}$ ) ausgegeben. Diese Stellen wurden in der Mitte des Stabes unmittelbar links und rechts der Schnittstelle zwischen Elementen und Partikeln gewählt, bei  $x=49.5 \text{ cm}$  (Punkt 1) und  $x=50.5 \text{ cm}$  (Punkt 2). Wenn im SPH-Bereich eine höhere Partikeldichte gewählt wurde, wurde der Druck des der Schnittstelle nächstgelegenen Partikels ausgegeben.

Die folgenden Abbildungen zeigen zunächst die Druckentwicklung in den Punkten 1 und 2. Abbildung 7.28 links gibt als „Referenz“ die reine FE-Lösung an, die Druckentwicklung in den Referenzpunkten ist nur durch die Phasenverschiebung unterscheidbar. Die Welle läuft zunächst als Druckwelle über die Punkte hinweg, wird am rechten Ende des Stabes als Zugwelle und am linken Ende wieder als Druckwelle reflektiert.

In der FIX-Kopplung (Abbildung 7.28 rechts) ist zu erkennen, wie die mit dieser Kopplungsvariante nur erzielbare relativ geringe Auflösung im Bereich der Partikel den Druckverlauf bei der Reflexion am freien rechten Stabende verändert. Diese Angleichung an die für das SPH-Verfahren charakteristischen Druckverläufe ist in allen Fällen zu beobachten, mit zunehmender Auflösung im SPH-Bereich wird ihre Auswirkung jedoch geringer.

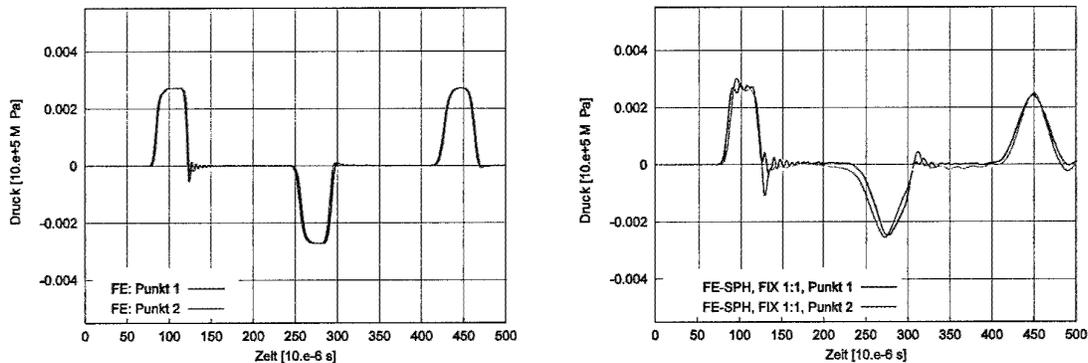


Abbildung 7.28: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei reiner FE-Diskretisierung (links) und bei Kopplung mit Übergangselementen (rechts).

Ergebnisse der Master-Slave-Kopplung zeigen die Diagramme in Abbildung 7.29. Da die MS-Kopplung keine Zugkräfte übertragen kann, ist nur der Durchgang der ersten Druckwelle dargestellt. Der Druck in Punkt 2 ist unabhängig von der Auflösung (Diagramme links, Mitte) etwa 50 % größer als der korrekte Druck in Punkt 1. Dies ist jedoch eindeutig als Randeffekt der SPH-Methode zu betrachten. Im Diagramm links wurde zusätzlich die Druckentwicklung an einem im Inneren des SPH-Bereiches gelegenen Punkt 3 ( $x=65 \text{ cm}$ ) angegeben, dieser zeigt den korrekten Spitzendruck. Das Diagramm in Abbildung 7.29 rechts stellt die Druckentwicklung bei MS-Kopplung mit dem NSPH-Verfahren dar. Der Randeffekt äußert sich bei der

Normalisierung in einem zu geringen Druck in Punkt 2.

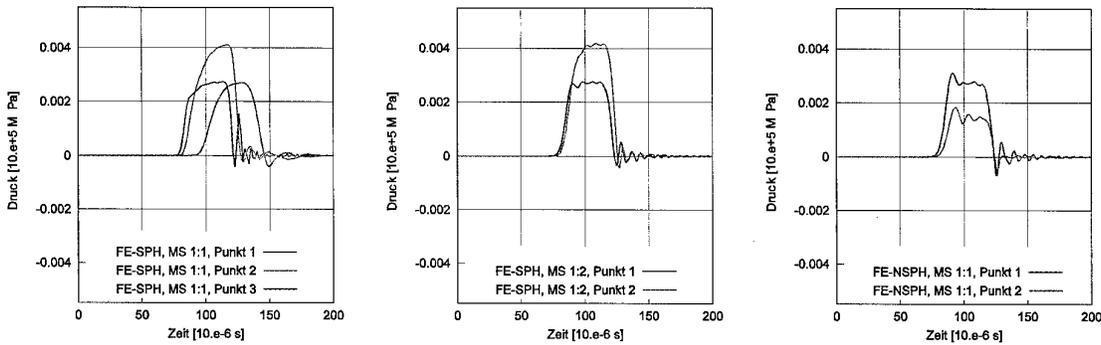


Abbildung 7.29: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Links: Grobe Auflösung im SPH-Bereich, Mitte: feinere Auflösung im SPH-Bereich, rechts: grobe Auflösung, Kopplung mit dem normalisierten SPH-Verfahren.

Ergebnisse der HA-S Kopplung sind in Abbildung 7.30 dargestellt. Bedingt durch das Kopplungsverfahren, bei dem die Spannungen im SPH-Bereich als Randbedingungen der Finiten Elemente genutzt werden, zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Druckverläufe in den Punkten 1 und 2, bei höherer Auflösung nähert sich der Druckverlauf dem der reinen FE-Rechnung an.

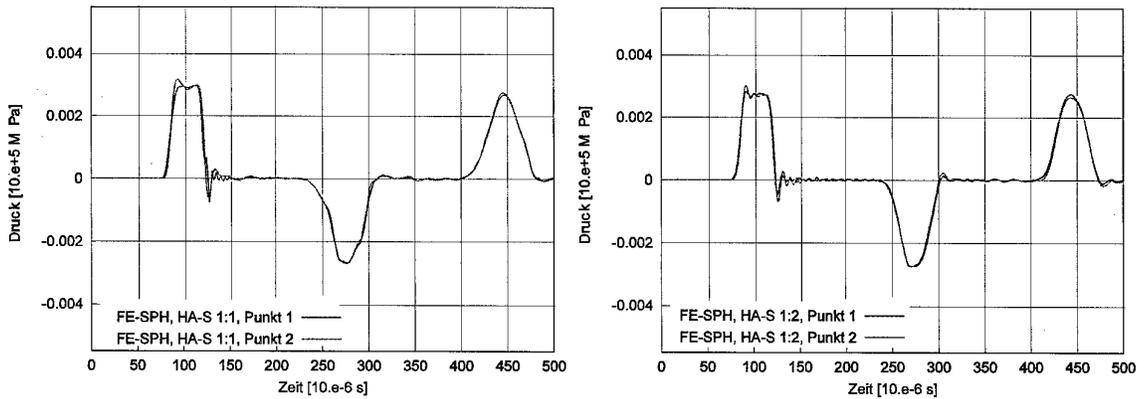


Abbildung 7.30: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem neuen HA-S Verfahren. Links: Grobe Auflösung im SPH-Bereich, rechts: feinere Auflösung im SPH-Bereich.

Die Druckverläufe für die HA-F-Kopplung sind mit vier verschiedenen Auflösungen im SPH-Bereich in den Abbildung 7.31 angegeben. Die bei grober Auflösung vergleichsweise großen Differenzen in der Druckentwicklung zwischen den Punkten 1 und 2 werden mit zunehmender Auflösung geringer, wenn vier Partikel pro Elementseite verwendet werden, sind die Druckverläufe praktisch identisch. Läuft die Druckwelle zuerst durch den SPH-Bereich, ist die Übereinstimmung bei gleicher Auflösung besser.

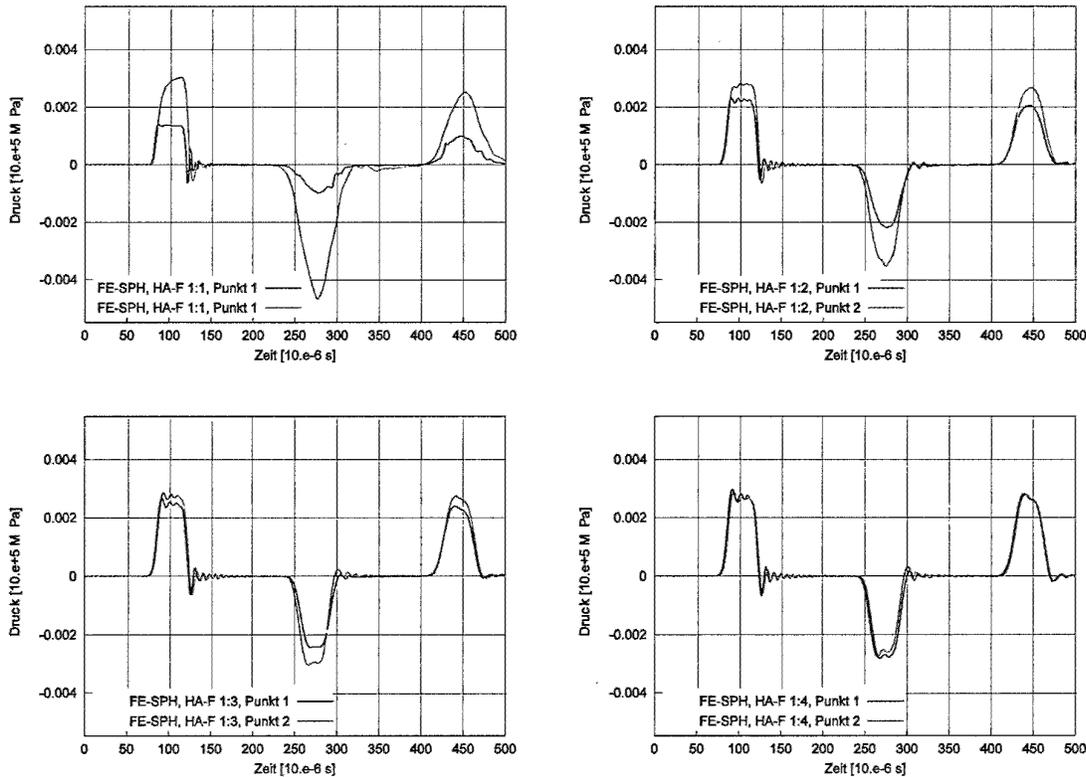


Abbildung 7.31: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem neuen HA-F Verfahren. Links oben: Grobe Auflösung im SPH-Bereich, rechts unten: feinste Auflösung im SPH-Bereich.

Die folgende Abbildung zeigt die mit der HA-F Kopplung berechnete Druckentwicklung für den Fall, in dem der linke Teil des Stabes mit Partikeln, der rechte mit Elementen diskretisiert wurde. Dadurch läuft die Welle zunächst aus dem SPH- in den FE-Bereich. Im Vergleich zum Ergebnis bei entsprechender Auflösung in Abbildung 7.31 ist die Beeinflussung durch die Kopplung geringer.

Eine ähnliche Konvergenz wie bei der HA-F-Kopplung mit dem SPH-Verfahren zeigt sich bei Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens (Abbildung 7.33).

Um die verschiedenen Kopplungsvarianten unmittelbar mit der reinen FE-Lösung vergleichen zu können, werden die Druckentwicklungen in Punkt 2 ( $x=50.5$  cm) in den folgenden Abbildungen dargestellt. Dabei sind in einem Diagramm jeweils verschiedene Auflösungen im SPH- bzw. NSPH-Bereich einander gegenübergestellt. Abbildung 7.34 zeigt zunächst die FE-Lösung, Abbildung 7.35 die Druckentwicklung, wenn der Stab vollständig durch die SPH- bzw. NSPH-Methode diskretisiert wird. In Abbildung 7.36 ist die Druckentwicklung für die FIX-Kopplung zu sehen, dabei wurde einmal der linke, einmal der rechte Stabteil durch Partikel ersetzt. Im Unterschied zu den in den übrigen Diagrammen dargestellten Kopplungsvarianten geht der Druck nach Durchgang der Wellen nicht auf 0 zurück, und es sind vergleichsweise

große Oszillationen in den Zeiträumen zwischen den Wellendurchgängen zu beobachten.

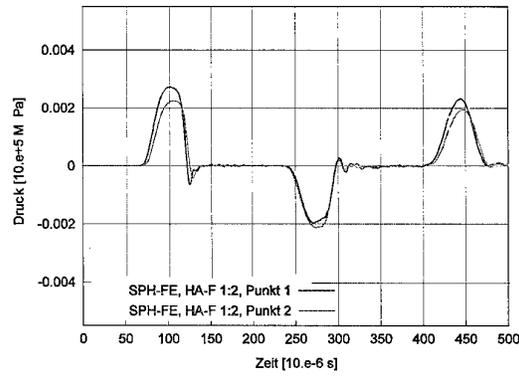


Abbildung 7.32: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem neuen HA-F Verfahren. Die Welle läuft hier zunächst aus dem SPH-Bereich in den mit FE diskretisierten Bereich.

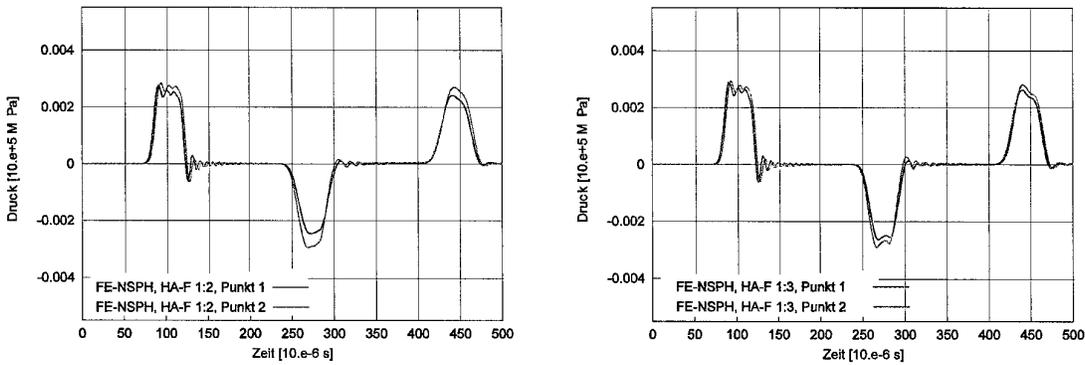


Abbildung 7.33: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 1 und 2 bei Kopplung mit dem neuen HA-F Verfahren und Anwendung der Normalisierung im SPH-Bereich (mittlere Auflösung links, feine Auflösung rechts).

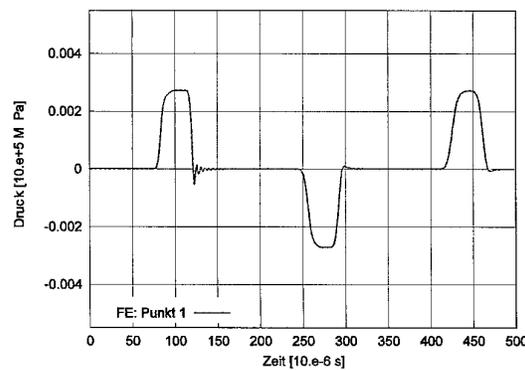


Abbildung 7.34: Druckentwicklung in Punkt 2 bei reiner FE-Diskretisierung.

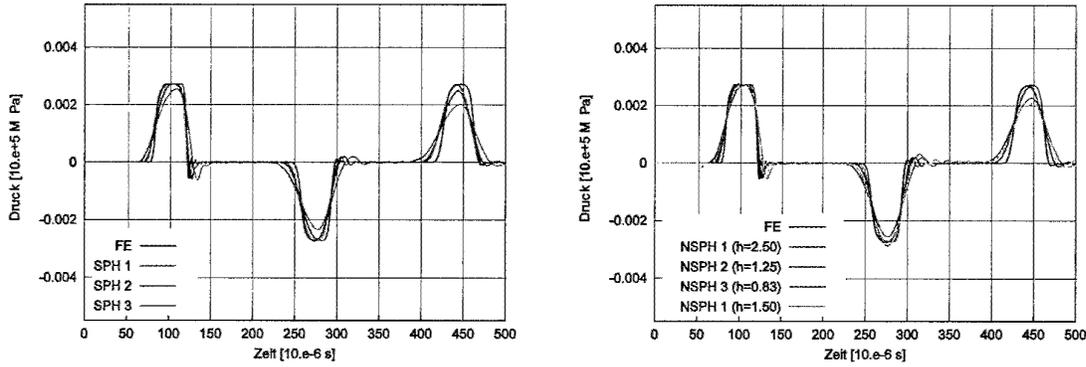


Abbildung 7.35: Vergleich der Druckentwicklung in Punkt 2 bei reiner SPH-Diskretisierung (links) und diskretisierung mit dem normalisierten SPH-Verfahren (rechts) in verschiedenen Auflösungen.

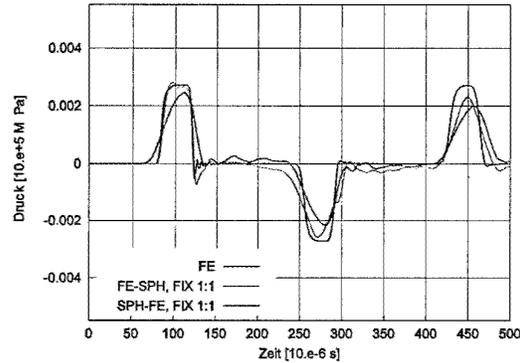


Abbildung 7.36: Druckentwicklung in Punkt 2 bei Kopplung mit Übergangselementen.

Die HA-S-Kopplung (Abbildung 7.37) weist eine gute Übereinstimmung auf, bei der HA-F-Kopplung (Abbildung 7.38) wird diese, wie bereits erwähnt, mit höherer Auflösung im SPH- bzw. NSPH-Bereich erreicht. Die zwei mal reflektierte Druckwelle ist bei einer Auflösung von 2 Partikeln pro Elementseite kaum noch von der rein mit der FE-Methode berechneten zu unterscheiden.

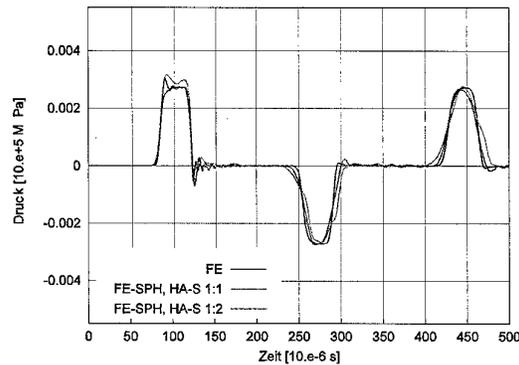


Abbildung 7.37: Vergleich der Druckentwicklung in Punkt 2 bei Kopplung mit dem HA-S-Verfahren und verschiedenen Auflösungen

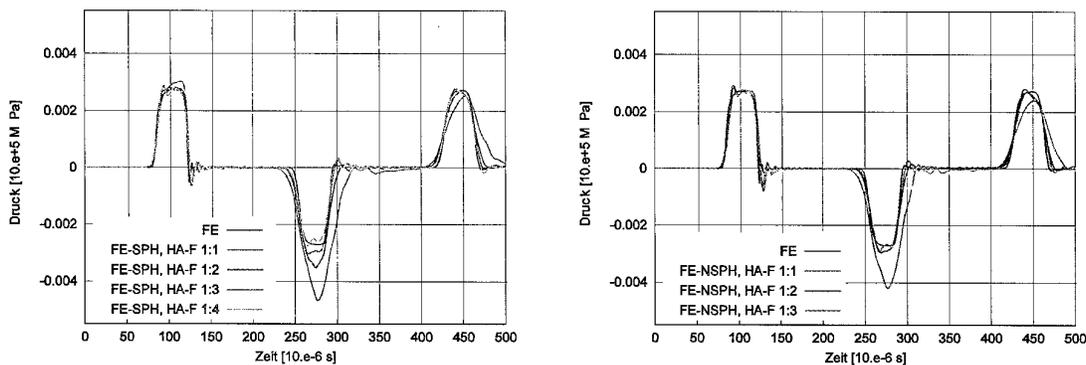


Abbildung 7.38: Vergleich der Druckentwicklung in Punkt 2 bei Kopplung mit dem HA-F-Verfahren und verschiedenen Auflösungen. Standard-SPH-Verfahren links, normalisiertes SPH-Verfahren rechts.

### 7.3.3 Vergleich der Impulsübertragung

Wichtiges Beurteilungskriterium für die Güte einer Hydrocode-Berechnung ist der Grad der Erhaltung des Gesamtimpulses und der Energie. In diesem Abschnitt wird zunächst die Impulserhaltung betrachtet. Bei der Kopplung zwischen den verschiedenen Diskretisierungsverfahren ist neben der Erhaltung des Gesamtimpulses insbesondere sicherzustellen, daß der in einem Bereich durch die Welle eingetragene Impuls möglichst vollständig und ohne Reflexion an der Grenzfläche weitergegeben wird.

In Anhang 1 ist in einzelnen Diagrammen die Entwicklung des Gesamtimpulses und der Impulssummen in der FE- bzw. SPH-Region dargestellt. Durch die von 0 bis  $35 \mu\text{s}$  wirkende Randbedingung steigt der Gesamtimpuls zunächst an, er sollte danach möglichst konstant bleiben.

Abbildung 7.39 zeigt eine Gegenüberstellung der Fehler bei der Übertragung des Impulses durch die verschiedenen Kopplungsvarianten und bei unterschiedlichen Auflösungen der

Partikelbereiche. Als Referenzzeitpunkte wurden dabei  $150 \mu\text{s}$  und  $380 \mu\text{s}$  nach Berechnungsbeginn gewählt, da dann die Welle die Schnittstelle zwischen den Diskretisierungsbereichen bei  $x=50 \text{ cm}$  vollständig passiert haben sollte. Das Ergebnis nach  $150 \mu\text{s}$  repräsentiert folglich die Güte der Übertragung der Druckwelle aus dem FE- in den SPH-Bereich. Nach  $380 \mu\text{s}$  befindet sich die reflektierte Zugwelle wieder vollständig im FE- Bereich, der für diesen Zeitpunkt angegebene Fehler ist auf den Ausgangsimpuls bezogen. Da die MS-Kopplung keine Zugkräfte übertragen kann, werden für  $380 \mu\text{s}$  keine Fehler der MS-Kopplung angegeben.

Wie den Diagrammen im Anhang 1 zu entnehmen ist, bleibt der Gesamtimpuls für die MS-Kopplung mit der SPH-Methode erhalten. Abbildung 7.39 zeigt, daß ein kleiner Teil des Impulses an der Grenzfläche reflektiert wird, er ist im Fehler in der Impulsübertragung von 2 % zu erkennen. Die FIX-Kopplung zeigt im Vergleich relativ starke Reflexionserscheinungen. Die Varianten des neuen Kopplungsalgorithmus sind hier deutlich überlegen. Durch Wahl einer höheren Auflösung im SPH-Bereich kann die Impulsübertragung zusätzlich verbessert werden. Dies gilt auch für die Gesamtimpulserhaltung (Anhang 1) beim HA-S-Verfahren sowie Kopplungen mit dem NSPH-Verfahren. Das HA-F Verfahren (Anhang 1) in Verbindung mit der Standard-SPH-Methode erfüllt dagegen die Impulserhaltung unabhängig von der Auflösung exakt.

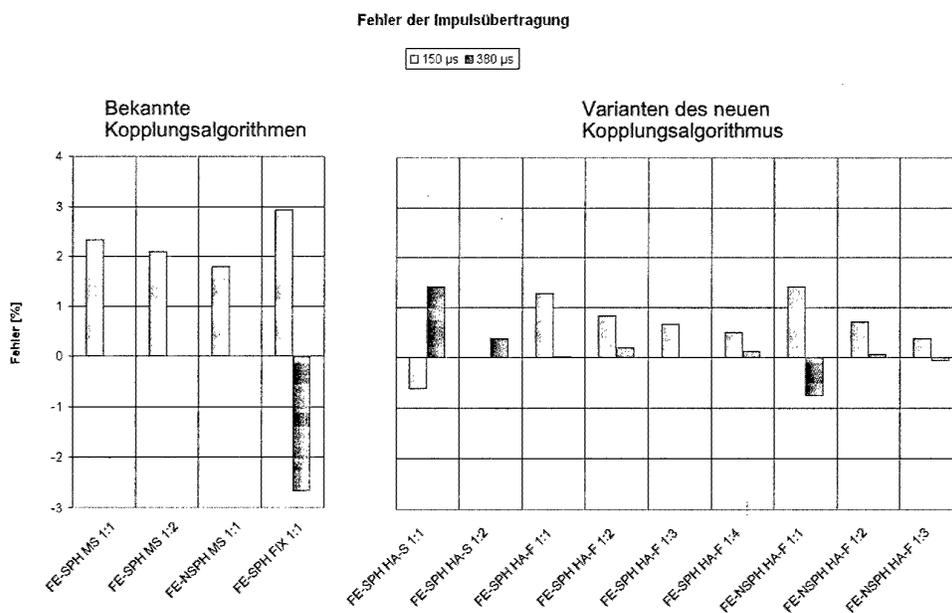


Abbildung 7.39: Vergleich der Fehler in der Impulsübertragung bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten.

### 7.3.4 Vergleich der Energieübertragung

Abschließend wird in diesem Abschnitt die Energieübertragung für den betrachteten Fall der elastischen Welle in einem mit unterschiedlichen Verfahren diskretisierten Stab untersucht. In den Diagrammen in Anhang 2 sind die Gesamtenergie sowie jeweils für die verschiedenen Bereiche die innere (elastische Formänderungs-) Energie und die kinetische Energie sowie deren Summen dargestellt. Die Bereiche sind dabei durch „1“ und „2“ bzw. „FE“ und „SPH“ für den linken bzw. rechten Bereich des Stabes gekennzeichnet.

Ein Vergleich der Fehler in der Energieübertragung ist Abbildung 7.40 zu entnehmen. Die Fehler nach 150  $\mu\text{s}$  wurden berechnet, indem die Differenz zwischen der durch die Randbedingung eingetragenen Energie nach 40  $\mu\text{s}$  und der Energie im rechten (mit Partikeln diskretisierten) Teil des Stabes nach 150  $\mu\text{s}$  ins Verhältnis zur eingetragenen Energie gesetzt wurde. Entsprechend wurde für 380  $\mu\text{s}$  die Differenz zwischen der eingetragenen Energie und der im linken Stabteil enthaltenen Energie gebildet und in das Verhältnis zur eingetragenen Energie gesetzt. Da bei dieser Betrachtung die SPH- bzw. NSPH-Methode alleine durch Dispersion bereits Fehler erzeugt sind die entsprechenden Vergleichswerte mit angegeben.

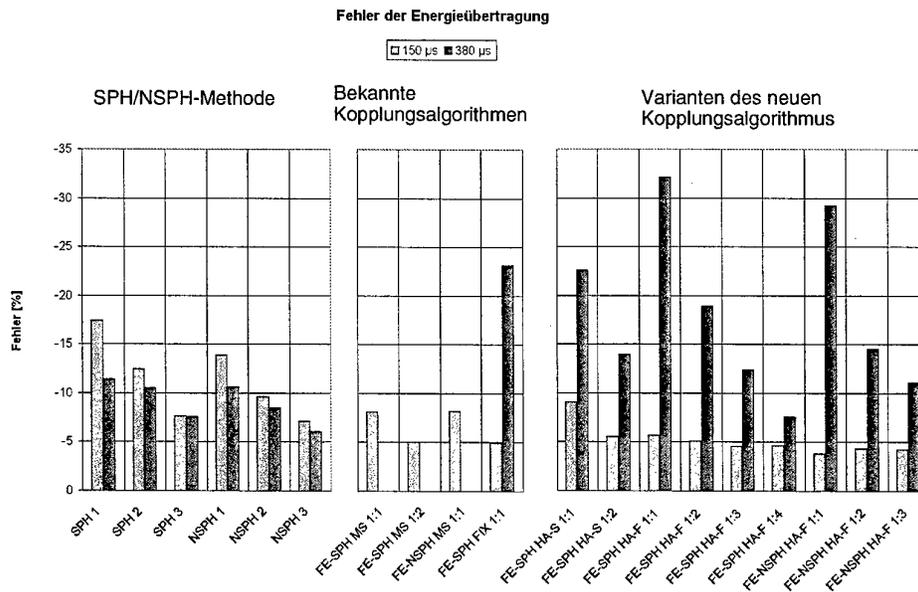


Abbildung 7.40: Vergleich der Fehler in der Energieübertragung bei reiner SPH- bzw. NSPH-Rechnung sowie bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten.

In der Darstellung der Fehler der Energieübertragung ist zu erkennen, daß bei den verschiedenen Kopplungsvarianten eine hohe Dispersion insbesondere beim Übergang der reflektierten Zugwelle aus dem Partikel- in den Elementbereich auftritt (für die MS-Kopplung sind keine Werte angegeben, da sie die Zugwelle nicht übertragen kann). Für die neuen Verfahren auf der

Basis der hybriden Approximation kann die Dispersion durch die Wahl höherer Partikeldichten vermindert werden.

Den Diagrammen in Anhang 2 für den vollständig mit der SPH- bzw. NSPH-Methode diskretisierten Stab bei unterschiedlichen Partikeldichten ist zu entnehmen, daß Fehler in der Gesamtenergieerhaltung vor allem als kurzfristige Schwankungen zu den Zeitpunkten, an denen die Welle am Stabende reflektiert wird und ein Großteil der Energie als innere Energie gespeichert ist, in Erscheinung treten. Dispersion ist beim nur mit Partikeln diskretisierten Stab in zwei verschiedenen Phänomenen zu beobachten: zum einen verteilt sich die Energie, die nach Aufbringen der Randbedingung zunächst vollständig im linken Teilbereich (1) ist, mit fortschreitender Berechnungsdauer auf die beiden Teilbereiche; zum anderen erhöht sich nach und nach der Anteil der inneren Energie an der Gesamtenergie. Beide Effekte verringern sich bei höherer Auflösung. Diese allein durch die Partikelmethode verursachten Erscheinungen sind auch bei der Bewertung der Energieerhaltung in der Kopplung von SPH und FE zu berücksichtigen.

Die HA-S-Kopplung zeigt in der groben (1:1) Auflösung eine leicht abnehmende Gesamtenergie, dieser Effekt verringert sich jedoch mit höherer Auflösung. Bei der HA-F-Variante der Kopplung ist der Fehler in der Gesamtenergieerhaltung größer, nimmt aber ebenfalls mit höherer Partikeldichte ab. Bei Kopplung des SPH-Verfahrens ist bei einer Auflösung von 3 Partikeln pro Elementseite mit etwa 2 % Fehler ein akzeptables Niveau erreicht, bei der Kopplung mit dem NSPH-Verfahren bereits bei 2 Partikeln pro Elementseite. Die Dispersion durch die HA-F-Kopplung ist geringfügig größer als durch die HA-S-Kopplung. Wie der Fehler in der Gesamtenergie ist auch die Dispersion bei Kopplung mit dem NSPH-Verfahren bei gleicher Partikelauflösung etwas geringer.

An dieser Stelle sei noch auf das letzte Diagramm in Anhang 2 hingewiesen. Es zeigt die Entwicklung der Energieanteile bei der Kopplung mit dem MS-Verfahren. Da wie gesagt mit dieser Kopplung nur der Durchgang der ersten Druckwelle berechnet werden kann, verbleibt die gesamte Energie danach im durch Partikel diskretisierten Teil des Stabes. Der Anteil der durch die Kopplung übertragenen Energie der Druckwelle sowie die im FE-Teil verbleibende Energie ist bei der MS-Kopplung ebenso groß wie bei den übrigen Kopplungsverfahren.

### 7.3.5 Schlußfolgerungen

Der Vergleich des in dieser Arbeit entwickelten Kopplungsverfahrens auf Basis einer hybriden Approximation zwischen SPH/NSPH- und FE-Bereich mit bestehenden Kopplungsverfahren hat gezeigt, daß sie im Sinne eines Einsatzes in einem adaptiven Berechnungsverfahren den bestehenden Verfahren überlegen sind. Das Master-Slave-Verfahren erweist sich als prinzipiell ungeeignet, da es weder Scher- noch Zugspannungen übertragen kann, es wurde jedoch zu Vergleichszwecken mit betrachtet. Dem Verfahren der Fixierung von Partikeln an Knoten von Übergangselementen sind die entwickelten Verfahren in der Impulsübertragung deutlich

überlegen, da die Reflexion der Welle an der Grenzfläche geringer ist. Die vorgeschlagenen neuen Verfahren besitzen zusätzlich die Vorteile der Flexibilität durch beliebige Wahl der Auflösung im Partikelbereich, hierdurch lassen sich Reflexionen an der Grenzfläche praktisch völlig verhindern. Es wurde gezeigt, daß diese höhere Auflösung im Partikelbereich die Voraussetzung dafür darstellt, Druck- und Zugwellen ohne größere numerische Dispersion simulieren zu können. Erst durch die Flexibilität in der Wahl der Auflösung konnte auch die Konvergenz der Verfahren im Beispiel der Simulation einer eindimensionalen elastischen Welle gezeigt werden.

Die beiden Varianten des neuen Kopplungsverfahrens unterscheiden sich in der Berechnung der Reaktionskräfte aus dem Partikel-Bereich auf die Elemente. Für das dargestellte Beispiel des Stabes mit einer geraden Grenzfläche zwischen Partikel- und Elementbereich erhält man bei Verwendung der Spannungen als Randbedingung für die Elemente (HA-S-Kopplung) etwas bessere Ergebnisse. Die Berechnung der Reaktionskräfte auf Basis der Beschleunigungsanteile in den (N)SPH- Summgleichungen (HA-F-Kopplung) bietet jedoch neben der konzeptionell bedingten Unempfindlichkeit gegenüber Veränderungen der Elementgeometrie und der leichten Anwendbarkeit für dreidimensionale Berechnungen den Vorteil der exakten Impulserhaltung. Voraussetzung für eine gute Erhaltung auch der Gesamtenergie ist allerdings bei dieser Variante der Kopplung die Wahl einer Auflösung von mindestens zwei, besser drei Partikeln pro Elementseite.

## 7.4 Einsatz des neuen Kopplungsverfahrens im Sinne eines adaptiven Berechnungsverfahrens

In reinen FE-Rechnungen wird Adaptivität üblicherweise dazu eingesetzt, anhand eines Fehlerkriteriums die Berechnung so zu modifizieren, daß ein genaueres Ergebnis erzielt werden kann. Dazu wird entweder der Polynom-Ansatzgrad von Elementen erhöht (p-Adaptivität), das Netz bereichsweise verfeinert (h-Adaptivität) oder die kontinuumsmechanische Dimension erhöht (d-Adaptivität). Letzteres erfolgt, um beispielsweise von einem Schalenelement auf Volumenelemente überzugehen.

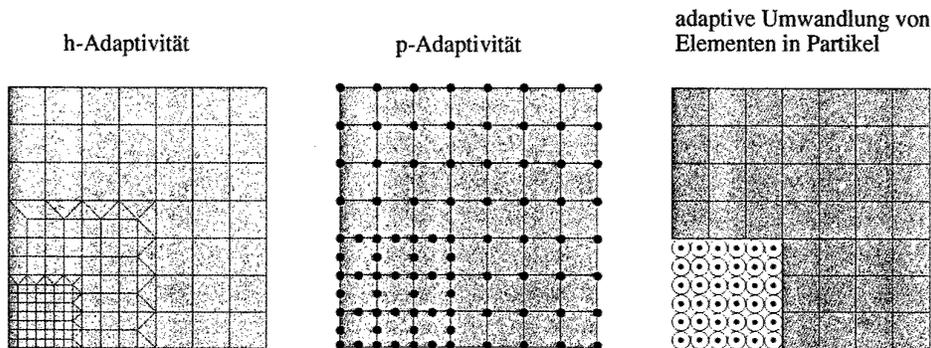


Abbildung 7.41: Prinzip der *h*- und *p*-Adaptivität im Vergleich mit der adaptiven Umwandlung von Elementen in Partikel

Hier wird Adaptivität in einem etwas anderen Sinne verwendet. Mit Hilfe der Kopplung von FE und SPH wird eine Umwandlung von Elementen in Partikel dort eingesetzt, wo dies aufgrund noch festzusetzender Kriterien sinnvoll erscheint, um das Berechnungsergebnis zu verbessern. Im Laufe einer Berechnung sind dann etwa Bereiche in SPH-Gebiete umzuwandeln, in denen Elemente versagen oder soweit verzerrt sind, daß sie keine genauen Ergebnisse mehr liefern können, möglicherweise auch Bereiche, in denen Risse auftreten. Durch diese Vorgehensweise ist gewährleistet, daß nur dort die numerisch aufwendigere Partikelmethode zur Anwendung kommt, wo dies nötig ist. Der Anwender ist dadurch von der Aufgabe befreit, diese Bereiche im voraus festlegen zu müssen.

Im folgenden wird erläutert, wie die adaptive Umwandlung von Elementen in Partikel im implementierten Programm realisiert wurde. Der praktische Einsatz des adaptiven Kopplungsverfahrens erfolgt im Rahmen des Berechnungsbeispiels in Kapitel 9.

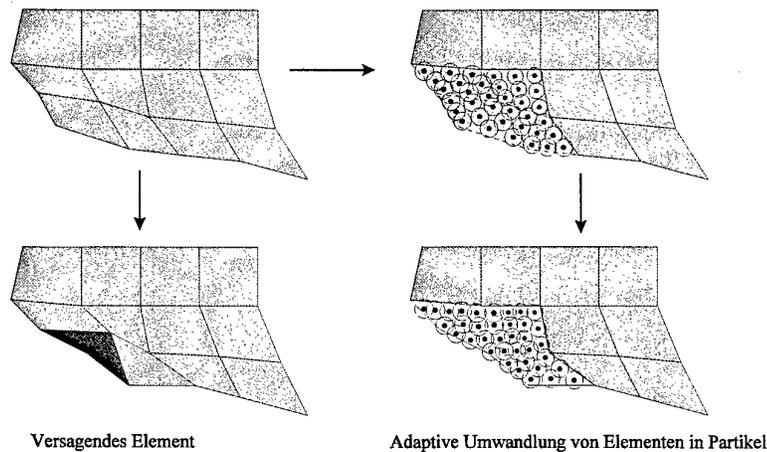


Abbildung 7.42: Einsatz der adaptiven Kopplung, um das Versagen von Elementen bei zu großen Deformationen zu verhindern.

#### 7.4.1 Kriterien für die Adaptivität

Die Verwendung eines Fehlerschätzers für die Umwandlung von Elementen in Partikel erscheint theoretisch möglich, wird jedoch in der vorliegenden Arbeit wegen des damit verbundenen, relativ großen Aufwandes nicht betrachtet. Dieser Aufwand lohnt sich jedoch insbesondere bei statischen Berechnungen, in denen in wenigen Optimierungsschritten mit adaptiven Verfahren ein deutlich verbessertes Ergebnis erzielt werden kann. Bei dynamischen Berechnungen mit expliziter Zeitintegration wird dagegen eine Vielzahl von Zeitschritten durchlaufen, und in jedem Zeitschritt ändert sich die Netzgeometrie, so daß konsequenterweise auch in jedem Zeitschritt ein erneuter Durchlauf des Fehlerschätzers erfolgen müßte.

In bestehenden Hydrocodes werden daher einfachere Kriterien benutzt, um Elemente, die eine ungenaue Approximation liefern, zu erkennen und aus der Berechnung zu entfernen. Man spricht dabei von „Erosion“ der Elemente, da damit zum Beispiel bei Penetrationsberechnungen ein Abtrag von Material, das seine Festigkeit verloren hat, simuliert werden soll. Am häufigsten wird als Kriterium die effektive plastische Dehnung  $\varepsilon_{eff,pl}$  verwendet. Die zugehörigen effektiven plastischen Dehnungsinkremente werden bei der Verwendung einer Fließregel nach von Mises in jedem Zeitschritt ermittelt nach

$$d\varepsilon_{eff,pl} = \frac{\sqrt{3I_2} - \sigma_y}{3G} \quad (7.21)$$

Hier ist  $I_2$  die zweite Invariante des Spannungstensors,  $\sigma_y$  die aktuelle Fließspannung und  $G$  der Schermodul. Die Inkremente der einzelnen Zeitschritte werden aufaddiert; wenn die effektive plastische Dehnung einen festzulegenden Grenzwert überschreitet, ist das Kriterium erfüllt. Üblicherweise verwendet man einen Wert zwischen 1 und 1.5 als Grenzwert, bei dem das Element bereits stark verzerrt ist.

Sollen die Elemente nicht wie bei der Erosion durch volumenlose Massepunkte, sondern wie hier durch Partikel ersetzt werden, kann ein geringerer Grenzwert gewählt werden, um die Fehler durch verzerrte Elemente möglichst gering zu halten. Johnson (1994) schlägt für seine Kopplung auf der Basis des Master-Slave-Algorithmus eine effektive plastische Dehnung von 0.5 als Grenzwert vor.

In der Anwendung des erstellten Berechnungsprogrammes (vgl. Kapitel 9) hat sich ein noch etwas niedrigerer Wert als vorteilhaft erwiesen. Hierdurch wird gewährleistet, daß nach der Umwandlung eines Elementes in Partikel die Verteilung der Partikel den Erfordernissen der SPH-Methode zu Beginn einer SPH-Rechnung entspricht. Da die Dichte in den verwendeten „constant stress“-Elementen konstant ist, haben alle neu erzeugten Partikel denselben Interpolationsradius. Durch die Umwandlung bei nicht zu großer Verzerrung des Elementes wird gewährleistet, daß die Überschneidungsbereiche der Einflußgebiete der Partikel alle etwa gleich groß sind und alle Partikel im wechselseitigen Kontakt stehen (vgl. Abbildung 7.43). Das verwendete Kriterium für die adaptive Umwandlung lautet:

$$\varepsilon_{eff.,pl} \geq \varepsilon_{eff.,pl,adapt} \quad , \quad 0.2 < \varepsilon_{eff.,pl,adapt} < 0.5 \quad (7.22)$$

Der Parameter  $\varepsilon_{eff.,pl,adapt}$  ist vom Programmbenutzer festzulegen, sollte jedoch in den angegebenen Grenzen gewählt werden.

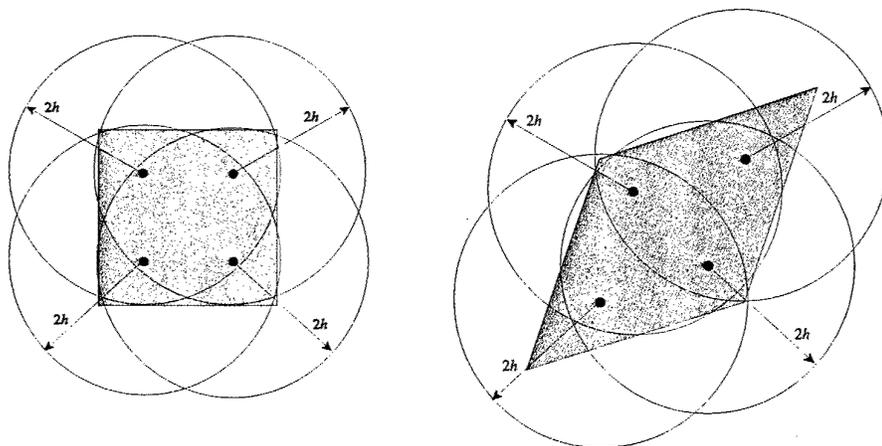


Abbildung 7.43: Überschneidung der Einflußbereiche der neu generierten Partikel in einem unverzerrten (links) und verzerrten (rechts) Element

Für spröde Materialien, bei denen Versagen bei deutlich geringeren plastischen Dehnungen eintreten kann, können andere Kriterien für die Umwandlung berücksichtigt werden. Hier bieten sich beispielsweise die in verschiedenen Materialmodellen - auch im Modell von Holmquist, Johnson & Cook (1993), das im Programm implementiert ist - verwendeten Damage-Variablen an. Diese wachsen mit der Schädigung des Materials an, beim Erreichen eines Wertes von 1 ist das Material vollständig geschädigt und kann keine Zugspannungen mehr aufnehmen. Die

Damage-Variable alleine gibt allerdings noch keinen Aufschluß darüber, ob das Element bereits so verzerrt ist, daß es tatsächlich ersetzt werden muß. Daher wurde im erstellten Programm als Kriterium für die Umwandlung eines Elements bei sprödem Materialverhalten die Kombination von Damage-Variable und effektiver plastischer Dehnung herangezogen:

$$D \geq D_{adapt} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{eff.,pl} \geq \varepsilon_{eff.,pl_{adapt}} \quad (7.23)$$

Die Kopplung von Partikeln und Elementen bietet die Möglichkeit, Ribentstehung und -wachstum mit einer netzfreien Methode zu simulieren, während die intakten Bereiche des Körpers mit Elementen diskretisiert werden. Hierfür sind jedoch zunächst in der SPH-Methode geeignete Versagensmodelle zu implementieren, die mit einer Methode für die Simulation der Diskontinuität mit der SPH-Methode zu verknüpfen sind, wie sie etwa Riedel (1997) vorgeschlagen hat.

#### 7.4.2 Durchführung der Umwandlung von Elementen in Partikel

Vor der Umwandlung von Elementen in Partikel ist zunächst festzulegen, wie viele Partikel pro Element erzeugt werden sollen. Dies geschieht im Programm durch die Definition einer Variablen zu Beginn der Berechnung. In ihr wird festgelegt, wie viele Partikel pro Elementseite erzeugt werden. Die Elementmasse wird auf entsprechend viele gleich große Partikel aufgeteilt. Für jedes Partikel werden die Geschwindigkeiten im lokalen Koordinatensystem des Elementes interpoliert, die Dichte und alle anderen, nur an dem Integrationspunkt des Elements definierten Werte, sind für alle Partikel konstant. Der Interpolationsradius ist aus der Masse, der Dichte und dem global festgelegten Verhältnis zwischen Partikelabstand und Interpolationsradius zu bestimmen.

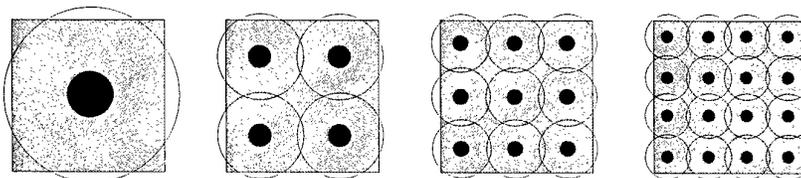


Abbildung 7.44: Umwandlung eines Elementes in 1, 4, 9 oder 16 Partikel

Wie in Abbildung 7.45 dargestellt, werden die Partikel so an der Stelle des zu löschenden Elementes plaziert, daß der Deformationszustand des Elementes abgebildet wird. Hierzu werden die lokalen Koordinaten des neuen Partikels im Element berechnet und anschließend in globale Koordinaten umgewandelt. Da für die SPH-Methode die Partikel möglichst gleichmäßig verteilt sein sollten, sollten prinzipiell nur solche Elemente in Partikel umgewandelt werden, die im Ausgangszustand quadratisch waren (bei dreidimensionalen Elementen: quadratische Seitenflächen hatten).

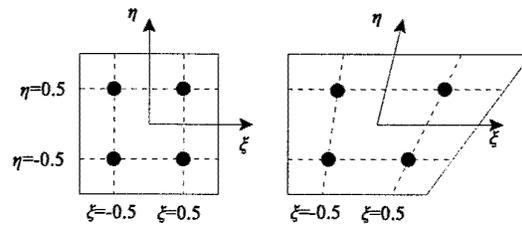


Abbildung 7.45: Plazierung der Partikel anhand der lokalen Koordinaten des zu ersetzenden Elementes

Beim Löschen des Elements werden der Integrationspunkt und die Knoten, die zu keinem weiteren Element gehören, gelöscht. Die Masse derjenigen Knoten, die noch zu einem anderen Element gehören, wird um ein Viertel der Elementmasse eines Quadrilaterals bzw. ein Achtel der Masse eines Hexaederelementes vermindert.

## 8. IMPLEMENTIERUNG IN EINER OBJEKT-ORIENTIERTEN PROGRAMMIERSPRACHE

Die im vorangegangenen Kapitel erläuterte Kopplung der SPH-Methode mit Finiten Elementen erfordert die Implementierung zweier unterschiedlicher Berechnungsverfahren in einem einzigen Programm. Hierzu könnten zwei bestehende Programme kombiniert und möglichst wenig modifiziert werden. Der Austausch zwischen den Diskretisierungsverfahren müßte dann über zusätzliche Schnittstellen erfolgen. Die Algorithmen für die Kopplung wären als dritter Programmteil zu implementieren. Besondere Schwierigkeiten ergäben sich immer dann, wenn die Kopplungsalgorithmen tief in die bestehenden Algorithmen eingreifen. Letzteres ist für die in Kapitel 7 vorgestellte, neu entwickelte hybride Approximation der Fall, da die SPH-Summen-gleichungen um Anteile erweitert werden, die aus Elementen zu ermitteln sind.

Aus diesen Gründen wurde in der vorliegenden Arbeit ein anderer Weg gewählt. Das bestehende SPH-Programm SOPHIA (Hiermaier, 1996) wurde als Ausgangspunkt für die Erstellung eines neu implementierten, beide Diskretisierungsverfahren vereinigenden („hybriden“) Programmes genutzt. Datenstruktur und Algorithmen konnten dadurch optimal auf das Problem abgestimmt werden. In bestehenden kommerziellen Hydrocodes, die eine Kopplung von SPH-Methode und Netzverfahren anbieten, wurde eine solche Neustrukturierung nicht durchgeführt, da sie aufgrund der Komplexität, die die Programme durch jahre- oder sogar jahrzehntelange Weiterentwicklung erlangt haben, einen kaum vertretbaren Aufwand darstellt.

Eine Reihe forschungsorientierter Programme auf der Basis des Verfahrens der Finiten Elemente wurde jedoch bereits unter Ausnutzung objektorientierter Methoden neu entwickelt, an noch weitergehenden, Algorithmus-orientierten Konzepten wird gearbeitet (z. B. Chudoba, 1997). Karutz (2000) hat in dem auf die Algorithmus-orientierte Vorgehensweise ausgerichteten FE- Programm ORPHEUS (Könke, Chudoba & Littwin, 1998) auch die netzfreie EFG-Methode integriert. Der Präprozessor von ORPHEUS wurde in der vorliegenden Arbeit für die Erstellung der FE-Netze verwendet. In ORPHEUS und anderen, auf der Basis objektorientierter Methoden implementierten Programmen (z. B. Foerch et al., 1997) stehen komplexe Algorithmen im Zentrum des Interesses, wie sie in statischen oder auf der Basis einer impliziten Zeitintegration zu lösenden Berechnungen benötigt werden, beispielsweise zur Assemblierung der Steifigkeitsmatrix oder zur iterativen Lösung großer Gleichungssysteme. Die relativ einfache algorithmische Struktur eines Hydrocodes ermöglichte für die Kopplung der SPH-Methode mit Finiten Elementen die Entwicklung eines neuen, einfacheren Konzeptes.

In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise vorgestellt, die durch eine objektorientierte

Datenstruktur die effiziente Implementierung des hybriden Berechnungsverfahrens im neu entwickelten Programm erlaubt. Der objektorientierte Ansatz spielt dabei eine entscheidende Rolle, da er die implizite Verknüpfung von Daten und den auf die Daten anzuwendenden Funktionen ermöglicht. Die Darstellung bleibt im folgenden auf die wesentlichen prinzipiellen Zusammenhänge beschränkt, eine detailliertere Beschreibung würde den Rahmen dieser Arbeit verlassen.

Die Implementierung des Programmes erfolgte in der Programmiersprache C++. Im folgenden verwendete Fachbegriffe der objektorientierten Technologie sind ausführlicher z. B. bei Rumbaugh (1993) oder Breymann (1996) erläutert.

## 8.1 Ausgangspunkt und Anforderungen

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Zielsetzungen, unter denen Datenmodell und Algorithmen entwickelt wurden, erläutert werden. Hierzu wird zunächst auf die bereits in SOPHIA verwendeten Konzepte eingegangen, anschließend werden die neuen, zusätzlichen Anforderungen definiert.

Als wesentliches objektorientiertes Konzept wurde bereits im Programm SOPHIA (Hiermaier, 1996), die Datenkapselung eingesetzt. Dabei werden Klassen - z. B. für Partikel - gebildet, denen Daten (wie Koordinaten, Spannungen etc., in der objektorientierten Syntax allgemein als „Attribute“ bezeichnet) zugeordnet werden. Diese Daten werden mit dem Schlüsselwort „private“ deklariert, damit können sie nur über Funktionen, die innerhalb der Klasse selbst zu definieren sind (auch als „Methoden“ oder „Elementfunktionen“ bezeichnet), abgefragt oder geändert werden. Für alle Variablen oder Variablengruppen, die außerhalb der Klasse benötigt werden, sind dann als „public“ zu deklarierende Funktion zu definieren, die den Zugriff von außen erlauben. Die für die Berechnung benötigten Daten sind in der ursprünglichen Struktur von Sophia im wesentlichen in 3 Klassen organisiert: *Koerper*, *Zelle*, *Partikel*.

*Koerper* speichern die Anzahl der ihnen zugeordneten Partikel. Daneben enthalten sie eine Zahl, die das zu verwendende Materialgesetz (Zustandsgleichung, Festigkeitsgesetz) definiert, und zwei Arrays, in denen die zugehörigen Materialdaten (Kompressionsmodul, Festigkeitsparameter etc.) abgelegt sind. Sie besitzen Funktionen, mit denen diese Arrays belegt oder gelesen werden können.

*Zellen* sind wesentliche Elemente des Suchalgorithmus für die Bestimmung der Nachbarn eines *Partikels*. Jede Zelle enthält Verweise auf das erste und das letzte *Partikel*, das der *Zelle* zuzuordnen ist (d. h. sich innerhalb des der *Zelle* zugeordneten Koordinatenbereichs befindet). Jedes *Partikel* hat selbst einen Verweis auf das nächste Partikel in der *Zelle*. Insgesamt erhält man dadurch eine sog. „verkettete Liste“, deren erstes und letztes Element in der Klasse *Zelle* gespeichert werden. Zu jedem Zeitschritt der Berechnung werden die Partikel neu den *Zellen*

zugeordnet. Neben den Verweisen auf die Partikel selbst besitzen *Zellen* noch Funktionen zur Initialisierung und Änderung dieser Verweise.

*Partikel* selbst sind Klassen, die alle zu einem Partikel gehörenden Zustandsgrößen enthalten (Koordinaten, Masse, Dichte, Geschwindigkeit, Spannungen, Dehnungen etc.). Daneben enthält die Klasse *Partikel* die public-Funktionen zum Zugriff auf die und zum Setzen der Werte dieser Variablen.

Die eigentliche Berechnung läuft in SOPHIA auf globaler Ebene ab, indem vom Hauptprogramm globale Funktionen aufgerufen werden, die sich dann jeweils über die Elementfunktionen die Daten von den Partikeln holen und neue Werte setzen.

Der Vorteil der Verwendung der Datenkapselung liegt darin, daß jederzeit genau nachvollzogen werden kann, an welcher Stelle ein Attribut der Klasse geändert wird, es ist einfach nach dem Aufruf der entsprechenden Elementfunktion zu suchen.

Der objektorientierte Ansatz bietet darüber hinaus weitere Möglichkeiten: möglichst viele Funktionen, die nur Attribute der Klassen bearbeiten, können innerhalb der Klasse selbst definiert sein. Sie werden zwar von außen - etwa vom Hauptprogramm aus - aufgerufen, sind also selbst public, dadurch, daß sie jedoch in der Klasse definiert sind, haben sie Zugriff auch auf alle privaten Attribute. Damit wird erreicht, daß Änderungen an den Funktionen im Verlauf der Implementierung und Erweiterung des Programmes nur noch lokale Auswirkungen in der Klasse selbst haben, solange die Schnittstellen nach außen bestehen bleiben. Dies erlaubt ein modulares Arbeiten in kleineren Einheiten, eine Voraussetzung, um größere Programme übersichtlich und wartungsfreundlich zu halten. Hierdurch können auch die Vorteile der objektorientierten Vorgehensweise genutzt werden, wie Code-Wiederverwendung durch Vererbung: wenn eine Klasse als „Kind“ einer anderen Klasse definiert wird, kann sie deren Attribute und Methoden „erben“, das heißt, diese sind in der „Kind-Klasse“ vorhanden, ohne daß sie explizit definiert werden müßten. Sie können jedoch, falls nötig, in der „Kind-Klasse“ neu implementiert oder modifiziert („überschrieben“) werden, ohne daß hierdurch die Methoden der ursprünglichen („Vater-“) Klasse beeinflußt werden. Der Mechanismus der Polymorphie ermöglicht es dem Programm, während der Laufzeit zu entscheiden, von welchem Typ eine bestimmte Klasse ist und automatisch die richtige zugehörige Funktion aufzurufen.

Zur Verdeutlichung werden in den folgenden Quelltext-Beispielen die prinzipiellen Vorgehensweisen einander am Beispiel einer fiktiven Berechnung einer Komponente des Spannungstensors gegenübergestellt: zunächst die reine Anwendung der Datenkapselung, im zweiten Beispiel Deklaration einer Methode innerhalb der Klasse und Aufruf der Methode für die Berechnung.

```

//Definition der Klasse Partikel
class Partikel {
private:
    double sigmaxx;

public:
    void get_sigmaxx(*sxx_ptr){*sxx_ptr=sigmaxx;};
    void set_sigmaxx(sxx) {sigmaxx=sxx;};
};

//Hauptprogramm
int i;
Partikel p;

int main(){
    double sxx;
    p.get_sigmaxx(&sxx);

    //Berechnung der neuen Spannungen
    sxx=...;
    p.set_sigmaxx(sxx);
}

```

```

//Definition der Klasse Partikel
//mit Methode calc_sigma
class Partikel {
private:
    double sigmaxx;

public:
    void calc_sigma() {
        sigmaxx=...;
    };
};

//Hauptprogramm
int i;
Partikel p;
int main(){

    //Berechnung der neuen Spannungen
    p.calc_sigma();
}

```

Bereits an diesem Beispiel wird deutlich, daß die Festlegung der Klassenstruktur entscheidend für die gesamte Implementierung ist: die Klassen müssen so festgelegt sein, daß die Methoden oder Elementfunktionen auch auf alle benötigten Daten zugreifen können. Im Beispiel müßten also alle zur Spannungsberechnung nötigen Daten von der Klasse *Partikel* aus zugreifbar sein. Dazu können auch Beziehungen zwischen verschiedenen Klassen genutzt werden, die in C++ auf verschiedene Weise realisiert werden können. Neben der Vererbung besteht die Möglichkeit, eine Klasse innerhalb einer anderen Klasse zu implementieren (sog. „nested class“), solange sie nur dort benötigt wird. Eine sogenannte Assoziation wird in C++ zumeist über Zeiger auf andere Klassen realisiert, hierdurch kann ein Objekt die „public“ Methoden eines anderen Objektes, auf das der Zeiger gerichtet ist, aufrufen, oder auf dessen Daten zugreifen.

Unter Ausnutzung der Möglichkeiten, die die objektorientierte Programmierung bietet, erfolgte die Strukturierung des Programmes. Dabei standen die folgenden Ziele im Vordergrund:

- Einheitliche, diskretisierungsunabhängige Schnittstelle für Materialmodelle
- Variabilität in der Wahl der Diskretisierungsmethode
- Möglichkeit der einfachen adaptiven Umwandlung von Elementen in Partikeln während der Laufzeit des Programmes
- Dynamische Speicherverwaltung
- Variable Dimensionalität (2D/3D)

Die Variabilität der Diskretisierungsmethode (Punkt 2) war insbesondere auch deswegen von Bedeutung, weil das Datenmodell eine möglichst einfache Einbindung von Weiterentwicklungen der SPH-Methode gestatten soll.

## 8.2 Modellbeschreibung

Grundsätzlich liegt die Idee nahe, sowohl Finite Elemente als auch Partikel als verschiedene Ausprägungen eines „Hydrocode - Grundelementes“ zu betrachten. Hierdurch müssen den Finiten Elementen und Partikeln gemeinsame Funktionen und Eigenschaften nur noch an einer Stelle, nämlich für das „Grundelement“, definiert werden. In der objektorientierten Semantik gesprochen sind dann Partikel und Elemente als von einer gemeinsamen Basisklasse abgeleitete Klassen zu beschreiben. Neben der Möglichkeit, alle gemeinsamen Funktionen in der Oberklasse zu implementieren, wird hierdurch eine einheitliche Schnittstelle zum globalen Algorithmus erzeugt.

Daher wurde zunächst untersucht, welche Funktionen solche „Grundelemente“ innerhalb einer zeitlichen Integrationsschleife einer Hydrocode-Berechnung übernehmen müssen. Abbildung 8.1 zeigt ein vereinfachtes Diagramm mit den Einzelschritten, die bei der Berechnung eines Zeitschrittes für Partikel und Elemente durchzuführen sind. Die in der Mitte des Diagramms dargestellten Aktionen (in abgerundeten Kästen) sind in beiden Diskretisierungsformen in ähnlicher Weise durchzuführen. An den Stellen, an denen sich das Diagramm teilt, sind besondere Funktionen für Elemente (rechteckige Kästen) bzw. Partikel (trapezförmige Kästen) vorzusehen, da hier Approximationen der räumlichen Ableitungen nötig sind.

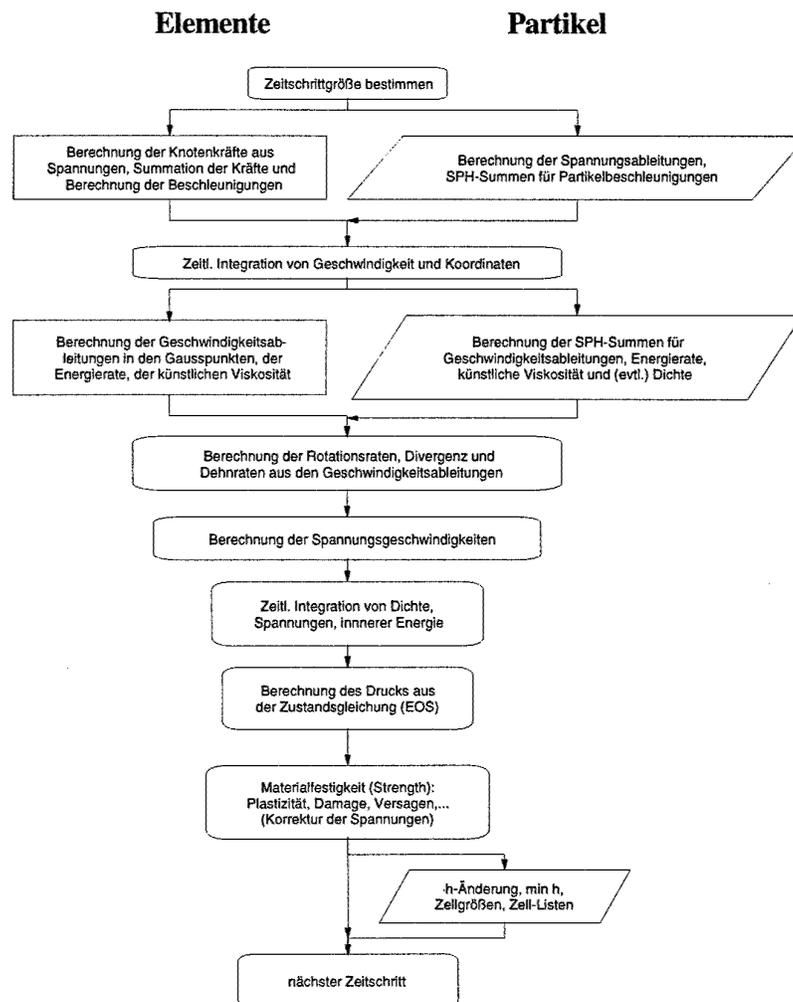


Abbildung 8.1: Vereinfachte Darstellung der Berechnungsschritte mit Zuordnung zu Partikeln und Elementen

### 8.2.1 Konzept von *MassPoint* und *StressPoint*

Zunächst soll untersucht werden, aus welchen Komponenten ein Hydrocode-Grundelement (im folgenden „Basiselement“ genannt) bestehen muß. Ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Partikelmethode wie SPH und Finiten Elementen besteht darin, daß die SPH-Methode ein Kollokationsverfahren darstellt: die Differentialgleichungen werden an  $n$  Punkten (näherungsweise) erfüllt. Finite Elemente als Ansatzverfahren erfüllen dagegen die schwache (über ein Volumen integrierte) Form der Differentialgleichungen (ebenfalls näherungsweise). Dadurch sind für Partikel alle physikalischen Größen am Ort des Partikels selbst anzugeben: das Zentrum der Partikelmasse befindet sich an den Partikelkoordinaten, dort sind auch die Spannungen definiert. Anders bei finiten Elementen: Bei Verwendung einer vereinfachten Massenmatrix („lumped Mass Matrix“), wie in Hydrocodes im allgemeinen üblich, wird die Elementmasse auf

die Elementknoten verteilt gedacht. Die Knoten werden als Massepunkte betrachtet, an denen Masse und Verschiebungsgrößen (Koordinaten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen) zu berechnen sind. Alle übrigen Größen, wie Spannungen bzw. Spannungsraten, die ihnen zugeordneten Dehnungen, Dichte und innere Energie sind an den Integrationspunkten im Elementinneren zu ermitteln. In diesem Sinne erfolgte die Entwicklung zweier grundlegender Klassen, die diese Aufteilung abbilden: die Klasse *StressPoints* bildet die Integrationspunkte ab, die Klasse *MassPoints* die Massepunkte. Sie sind dann in geeigneter Weise mit den Basiselementen zu verknüpfen (zu assoziieren).

Damit lassen sich bequem, wie in Abbildung 8.2 dargestellt, Partikel aus einem *MassPoint* und einem *StressPoint* zusammensetzen. Die quadrilateralen „constant-stress“ Finiten Elemente dagegen haben einen *StressPoint* und vier zugeordnete *MassPoints*, Hexaederelemente einen *StressPoint* und 8 *MassPoints*.

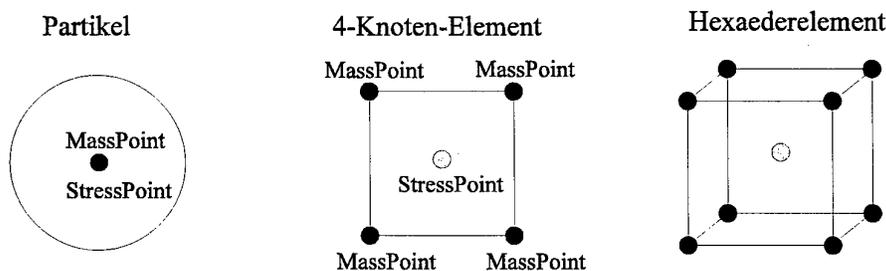


Abbildung 8.2: Konzept von *MassPoint* und *StressPoint* zur Darstellung von Partikeln und Elementen

### 8.2.2 Basiselemente als abstrakte Basisklasse für Elemente und Partikel

Abbildung 8.1 verdeutlicht, daß ein Gutteil der Berechnungsschritte in einem Hydrocode für Partikel und Elemente dieselben sind. Daher erscheint es sinnvoll, für beide eine gemeinsame Schnittstelle festzulegen, so daß Partikel und Elemente in einer gemeinsamen Liste abgelegt und im Hauptprogramm Iterationen über diese Liste durchgeführt werden können. So kann zum Beispiel die Abfrage der für die Zeitschrittbestimmung maßgeblichen Parameter als Funktion in der Schnittstelle enthalten sein, sie ist dann nur für Elemente und Partikel unterschiedlich implementiert.

Dieses Ziel kann durch die Verwendung der bereits erwähnten „Basisklassen“ erreicht werden: Es wird eine Klasse für Basiselemente „*BasisEl*“ definiert, in der alle Attribute und Methoden, die zu der gemeinsamen Schnittstelle gehören sollen, deklariert sind. Die zugehörigen Funktionen werden, sofern sie nicht für alle Basiselemente gleich sind, in den von der Basisklasse abgeleiteten Klassen *SPH\_BasisEl* (Partikel) und *FE\_BasisEl* (Finites Element) implementiert. Die abgeleiteten Klassen sind damit eine spezielle Ausprägung von *BasisEl*, können aber immer noch als *BasisEl* angesprochen werden: zur Laufzeit des Programmes ist

bekannt, von welchem Typ das *BasisEl* ist (Partikel oder Element), und es wird automatisch die richtige zugehörige Funktion aufgerufen.

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, lassen sich Basiselemente aus *StressPoints* und *MassPoints* zusammensetzen. Allerdings sollte deren Anzahl pro Basiselement (sowohl Anzahl der *Stress*- als auch Anzahl der *MassPoints*) variabel sein, um zum Beispiel Elemente mit mehr als einem Integrationspunkt oder Hexaederelemente mit acht Knoten bzw. *MassPoints* erzeugen zu können. Außerdem müssen mehrere Elemente auf einen *MassPoint* zugreifen können, denn in einem Berechnungsnetz werden die Knoten von mehreren Elementen genutzt. Es erscheint daneben vorteilhaft, *Mass*- und *StressPoints* außerhalb der Basiselemente zu speichern, auch um Schleifen, die direkt auf sie angewendet werden können, nicht über die Basiselemente aufrufen zu müssen. Konkret wurden in der Klasse *BasisEl* daher ein Array von Zeigern auf *MassPoints* und ein Array von Zeigern auf *StressPoints* definiert. Außerdem gibt es je eine Integer-Variable für die Anzahl von *Mass*- bzw. *StressPoints*. Dadurch wird eine große Flexibilität erreicht: neben Partikeln und Constant-Stress-Elementen könnten auch Elemente mit höheren Ansatzgraden und entsprechend höheren Knotenzahlen bzw. Integrationspunkten entwickelt und als von *BasisEl* abgeleitete Klassen implementiert werden.

Zentrale Methoden, die in der Klasse *BasisEl* deklariert und in den abgeleiteten Klasse definiert sind, sind

- eine Funktion, die die maximale Zeitschrittgröße für das Element/Partikel berechnet (*local\_deltat*),
- eine Funktion für die Berechnung der Beschleunigungen der Partikel bzw. der Kräfte auf die Knoten aus einem Element (*calc\_accel*),
- eine Funktion, in der die räumliche Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes an den Spannungspunkten, die Energierate und die künstliche Viskosität berechnet wird (*calc\_rates*).

Der vollständige Quelltext der Deklaration der Klasse *BasisEl* ist in Anhang 3 wiedergegeben.

Ein grundsätzliches Problem ergibt sich daraus, daß für Partikel diese Funktionen einfach der Reihe nach für jedes Partikel aufgerufen werden können, um etwa die Partikelbeschleunigungen berechnen zu können oder Werte einzulesen. Die Reihenfolge der Partikel spielt dabei keine Rolle. Bei Finiten Elemente muß jedoch die Netztopologie berücksichtigt werden: Die Kräfte auf die Knoten aus den Elementen (innere Kräfte) können zwar in einer Schleife über alle Elemente aufsummiert werden, die Berechnung der Beschleunigungen aus den aufsummierten Kräften muß jedoch in einer zweiten Schleife nur über die Knoten (*MassPoints*) erfolgen. Deutlicher wird das Problem noch, wenn Daten eingelesen und das Modell im Speicher erzeugt werden soll: Partikel können einfach gebildet werden, indem Partikelwerte (z. B. der Interpolationsradius *h*), anschließend die Werte des zugehörigen *MassPoint* und des *StressPoint* einfach hintereinander eingelesen werden. Für Elemente ist dies jedoch schwieriger zu

bewerkstelligen: weil *MassPoints* zu mehreren Elementen gehören können, sind sie getrennt von den Elementen zu erzeugen und zu lesen, erst wenn alle *MassPoints* gelesen sind, können die Zeiger der *FE\_BasisEl* auf die *MassPoints* gesetzt werden.

Daher wurde eine weitere Basisklasse *Region* entwickelt, die nur auf zugehörige Basiselemente zugreift. Die Aufgabe der konkreten Realisierungen *SPH\_Region* und *FE\_Region* der Basisklasse *Region* ist es, die Anforderungen des globalen Algorithmus für die Basiselemente zu „übersetzen“ bzw. aufzurufen, wo dies nicht direkt aus dem Hauptprogramm geschehen kann. Vom Hauptprogramm aus wird damit beispielweise in einer Schleife über alle Regionen die Funktion *read\_BasisEl* zum Erzeugen von Basiselementen und zum Einlesen der zugehörigen Daten aufgerufen. *SPH\_Regions* erzeugen dann die spezifizierte Anzahl Partikel neu und rufen dann ihrerseits für diese Partikel die Funktion *read* auf. *FE\_Regions* nutzen dagegen einen aufwendigeren Algorithmus, um das Berechnungsnetz zu erzeugen.

### 8.2.3 Konzept von Strength- und EOS-Klassen

Die Berechnung von Druck und Spannungen geschieht durch die bereits erwähnten *StressPoints*. Durch die Aufteilung des Spannungstensors in Druck und deviatorischen Anteil und die getrennte Berechnung dieser Anteile in Zustandsgleichung und Festigkeitsgesetz liegt es nahe, hierfür zwei verschiedene, den *StressPoints* untergeordnete Klassen einzuführen. Damit können verschiedene Kombinationen von Festigkeitsgesetz und Zustandsgleichung einfach erzeugt werden, und eine saubere Trennung der beiden Komponenten in der Implementierung ist gewährleistet. Als dritte Komponente wäre ein Versagensmodell zu betrachten, dies wurde jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit noch nicht implementiert.

Entsprechend der bereits bei der Beschreibung der Basiselemente erläuterten Vorgehensweise wurden zwei Basisklassen *Strength* (für die Festigkeitsbeschreibung) und *EOS* (für die Zustandsgleichung) entwickelt, die die grundlegenden, allen Modellen gemeinsamen Variablen (z. B. Druck, Dichte und spezifische innere Energie für *EOS*, deviatorische Spannungen und Dehnraten für *Strength*) enthalten. Daneben enthalten sie Funktionen zum Ein- und Auslesen der Daten und für die durchzuführenden Algorithmen, etwa die Berechnung des Drucks oder Fließgesetzes. Diese Funktionen können in abgeleiteten Klassen, z.B. einer von *EOS* abgeleiteten Klasse für lineare Zustandsgleichungen *lin\_EOS*, definiert werden.

Zu jedem Materialgesetz gehört, wenn es in der Berechnung das Verhalten eines bestimmten Materials abbilden soll, ein Satz von Materialkonstanten. Für die Zustandsgleichung eines ideal-elastischen Materials müssen in der gegebenen Formulierung beispielsweise mindestens der Kompressionsmodul und die Dichte bei  $p=0$  angegeben werden, für das zugehörige Festigkeitsgesetz wird der Schermodul benötigt. Dieser Satz von Daten wird zweckmäßig nicht mit jedem einzelnen *StressPoint* bzw. *EOS*- oder *Strength*-Objekt gespeichert, es genügt vielmehr, für jedes vorkommende Material diese Parameter einmal zu speichern und in den *EOS*- und *Strength*- Klassen Verweise auf diese Datensätze zu verwenden. Die Materialdatensätze wurden

daher als gesonderte Klasse mit dem Namen *MatConst* implementiert. Jedes *EOS*-Objekt mit einer bestimmten Zustandsgleichung für ein bestimmtes Material fragt bei seiner Erzeugung ab, ob bereits ein *MatConst*-Objekt mit den erforderlichen Parametern existiert. Wenn ja, wird der zu diesem Zweck in der *EOS*-Klasse vorhandene Zeiger auf das existierende *MatConst*-Objekt gerichtet, wenn nicht, wird zuerst das entsprechende *MatConst*-Objekt erzeugt und auf der globalen Ebene gespeichert, dann wird der Zeiger auf das neue Objekt gerichtet. In *MatConst* werden die Parameter in Form eines Arrays aus double-Variablen abgelegt. Für den Zugriff auf einen Parameter aus *MatConst* muß nur in der *EOS*-Klasse eine Funktion implementiert werden, das heißt, in der *EOS*-Klasse selbst ist festgelegt, an welcher Stelle in *MatConst* welcher Parameter abgelegt ist. Entsprechend ist die Vorgehensweise bei *Strength* Klassen.

Abbildung 8.3 zeigt eine Übersicht der erstellten Klassenstruktur, dabei wurde die Darstellung nach Rumbaugh (1993) verwendet. Ein Punkt am Ende einer Linie bedeutet eine Assoziation, eine einfache Linie ohne Punkt eine Vererbungsbeziehung (Ableitung). Um die Darstellung nicht zu überfrachten, wurden die von *Region* abgeleiteten Klassen *FE\_Region* und *SPH\_Region* nicht dargestellt.

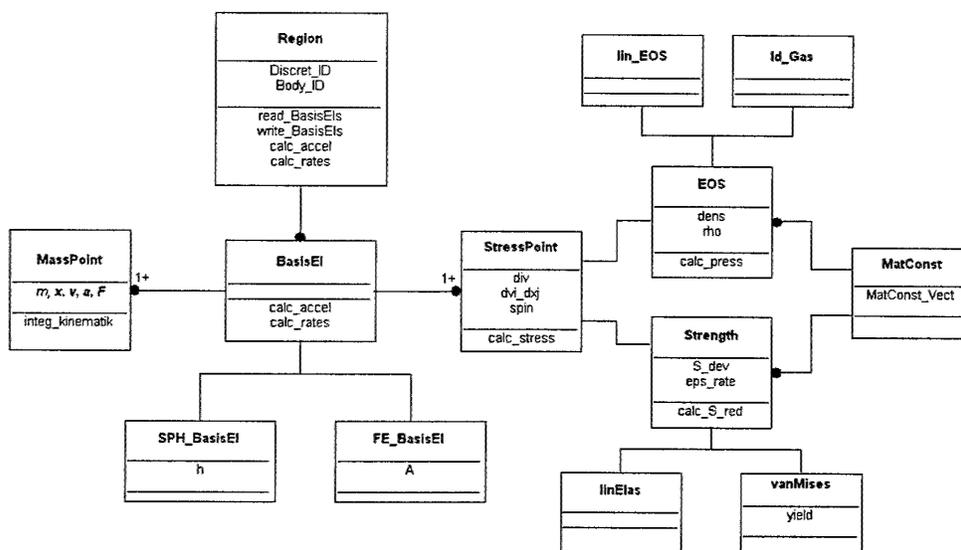


Abbildung 8.3: Übersichtsdiagramm des entwickelten Datenmodells

#### 8.2.4 Regionen und Körper - Übergang zur globalen Datenstruktur

Mit der Festlegung der Klassenstruktur ist noch nicht entschieden, wie die Objekte auf der globalen Ebene verwaltet werden. Möglich wäre es zum Beispiel, alle Basiselemente in einem einfachen Array abzulegen oder für jede Region ein eigenes Array anzulegen. Da Regionen im Verlaufe der Berechnung mehrfach Schleifen über die ihnen zugeordneten Basiselemente aufzurufen haben, erscheint eine Struktur sinnvoll, in der diese Zuordnung abgebildet ist.

Zur Lösung dieser Fragestellungen wurde die „Standard Template Library“ (STL) (Stepanov & Lee, 1995) eingesetzt. Die STL ist eine Programmbibliothek, die häufig benutzte Datenstrukturen, wie verschiedene Arten von Bäumen, Listen etc., zur Verfügung stellt. Sie wurde speziell für C++ entwickelt und ist mittlerweile für alle Plattformen verfügbar (sie wird meist mit einem C++ - Compiler mitgeliefert). Die implementierten Algorithmen sind sehr gut ausgetestet, effizient und für große Datenmengen ausgelegt. Die STL wurde daher für die Verwaltung der Objekte genutzt, die Algorithmen sind ausführlich bei Glass & Schuchert (1996) beschrieben. Im folgenden wird erläutert, wie im erstellten Programm die Elemente der Datenstruktur - *MassPoints*, *StressPoints*, *BasisEl* etc. - mit Hilfe der STL verwaltet werden. Der Quelltext der entsprechenden Deklarationen im Programm findet sich in Anhang 4.

Grundsätzlich ist zu gewährleisten, daß auch in der globalen Datenstruktur das Konzept der Polymorphie nutzbar gemacht wird. Wie oben dargestellt wurde, sind Partikel als eine von *BasisEl* abgeleitete Klasse *SPH\_BasisEl*, Elemente als ebenfalls von *BasisEl* abgeleitete Klasse *FE\_BasisEl* definiert worden. Sie sind, obwohl sie von der selben Klasse abgeleitet wurden, natürlich selbst unterschiedliche Klassen und können nicht unmittelbar zusammen in einer einfachen Liste gespeichert werden.

In C++ ist die Polymorphie durch die Verwendung von Verweisen (Zeigern) realisiert, ein Zeiger auf Objekte vom Typ *BasisEl* kann auch auf alle von *BasisEl* abgeleiteten Objekte gerichtet werden. Indem nicht die Objekte selbst, sondern Zeiger auf die Objekte in der Datenstruktur gespeichert werden, lassen sich alle von *BasisEl* abgeleiteten Objekte in einer gemeinsamen Struktur verwalten.

Für die unterschiedlichen Elemente des Datenmodells wurden verschiedene Datenstrukturen der STL eingesetzt, die im folgenden erläutert werden.

Verweise auf Basiselemente werden in einer „multimap“ genannten Datenstruktur der STL gespeichert. Sie besteht im Prinzip aus einem Suchbaum und ist so angelegt, daß zu jedem Element der multimap (die Elemente sind hier die Zeiger auf *BasisEl*) ein Schlüssel gespeichert wird, wobei zu einem Schlüssel beliebig viele Elemente existieren können. Das Suchen von Elementen läuft allein über diesen Schlüssel. Als Schlüssel wurde hier eine integer-Zahl gewählt, die die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Region spezifiziert. Da alle Elemente der multimap automatisch nach dem Schlüssel sortiert sind, können die zu einer Region gehörenden Basiselemente sehr schnell gefunden werden, Schleifen über diese Basiselemente sind dann einfach durchzuführen. Der Schlüssel wird zweckmäßig in der Region selbst gespeichert.

Zeiger auf Regionen werden in einer „map“ gespeichert, die sich von der erwähnten „multimap“ dadurch unterscheidet, daß nur ein Element mit einem bestimmten Schlüssel vorkommen darf. Dadurch ist automatisch gewährleistet, daß jeder Schlüssel nur einmal existiert und jede Region ihren eigenen Schlüssel besitzt.

*MassPoints* werden, wie die Basiselemente, in einer multimap mit dem Schlüssel der Region, der sie zuzuordnen sind, verwaltet. Da ein *MassPoint* zu mehreren Basiselementen gehören kann, speichern *MassPoints* die Anzahl der Basiselemente, die auf sie zugreifen. Werden Basiselemente gelöscht, etwa weil wegen einer Umwandlung in Partikel ein Finites Element gelöscht wird, wird diese Zahl verringert. Der *MassPoint* wird erst dann gelöscht, wenn kein Basiselement mehr auf ihn zugreift.

*StressPoints* sind, im Gegensatz zu *MassPoints* immer eindeutig über die Basiselemente den Regionen zuzuordnen, jeder *StressPoint* gehört zu genau einem Basiselement. *StressPoints* werden daher einfach in einer globalen Liste gespeichert. Der Zugriff von den Basiselementen aus erfolgt, wie oben erläutert, über ein Array von Zeigern. Als Container wird das list-Template der STL verwendet (doppelt verkettete Liste), damit können einzelne *StressPoints* ohne großen Aufwand gelöscht werden. Letzteres ist bei der Umwandlung von Elementen in Partikel nötig.

Um zu verdeutlichen, wie die beschriebene Datenstruktur eingesetzt wird, ist in Anhang 5 der Quelltext der Zeitintegrationsschleife, die im Hauptprogramm in jedem Zeitschritt durchlaufen wird, wiedergegeben.

### 8.3 Implementierte Klassen

Abbildung 8.4 präsentiert eine Übersicht über alle implementierten Klassen. Sie zeigt nur die Vererbungshierarchie, nicht die übrigen Beziehungen der verschiedenen Klassen untereinander. Im folgenden sollen die noch nicht erläuterten Klassen kurz beschrieben werden.

Die Klasse *GlobalIOInterface* definiert lediglich eine Schnittstelle für die Ein- und Ausgabe-funktionen der von ihr abgeleiteten Klassen. Sie dienen zum Lesen aus und Schreiben in Dateien sowie zur Generierung der Ausgabedaten für das Postprocessing.

Innerhalb der Klasse *BasisEl* wurde eine Klasse für Nachbarn *neighbour* implementiert. Jedes *BasisEl* kann in einer eigenen Liste eine beliebig große Anzahl der Nachbarn verwalten, die im Rahmen der SPH-Methode für die Approximation benötigt werden. Objekte der Klasse *neighbour* speichern dabei die räumliche Lage bezüglich des betrachteten Basiselementes und einen Zeiger auf das Basiselement, zum Beispiel das Partikel, das dem betrachteten benachbart ist. Hierdurch wurde es ermöglicht, die Suchalgorithmen für die Nachbarsuche der SPH-Methode vollständig von den Schleifen zu trennen, in denen die SPH-Summen berechnet werden. Die Nachbarsuche braucht außerdem in jedem Zeitschritt nur einmal durchgeführt zu werden, die Abstände zum Nachbarn können dann für die Approximation zu halben Zeitschritten anhand der aktuellen Koordinaten neu berechnet werden.

Die Klassen *SearchGrid* und *Cell* sind ebenfalls für die Nachbarsuche von Bedeutung. Sie erfüllen im wesentlichen die von Hiermaier (1996) für die Nachbarsuche geschilderten

Funktionen. Die Funktionalität der Klasse *Cell* entspricht der bereits geschilderten Klasse *Zelle* in SOPHIA. Die *Cell*-Objekte werden in der Klasse *Searchgrid* in Form eines dynamischen Arrays gespeichert.

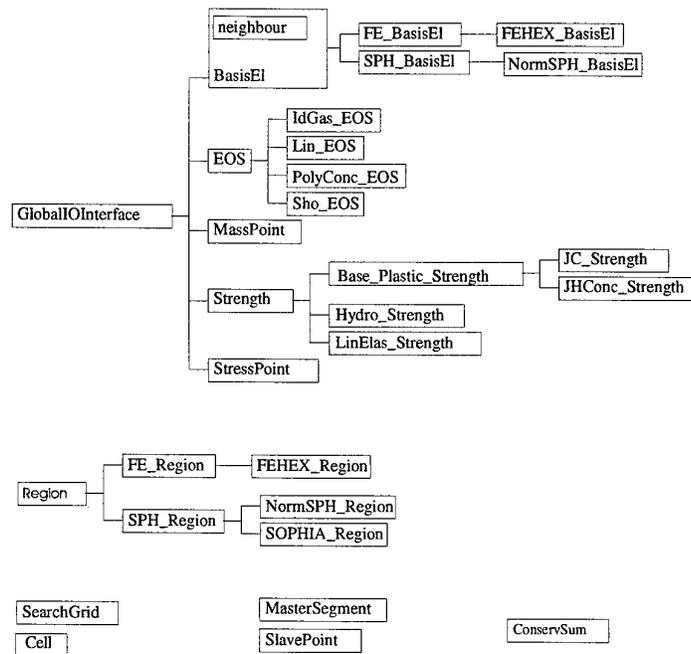


Abbildung 8.4: Übersicht über die implementierten Klassen

*MasterSegment* und *SlavePoint* sind Klassen, die nur in der Kontaktberechnung mit dem Master-Slave-Algorithmus benutzt werden. Ein *MasterSegment* wird aus der Kante eines Elementes erzeugt, *SlavePoint*-Objekte können aus *MassPoints*, also Elementknoten oder Partikeln erzeugt werden. *SlavePoint*-Objekte besitzen nur Koordinaten, Masse und Geschwindigkeit sowie eine Referenz auf den *MassPoint*, zu dem sie gehören, damit diesem die berechneten Kontaktkräfte zugewiesen werden können.

Die Klasse *ConservSum* schließlich speichert und aktualisiert die Summen der globalen Impuls- und Energieerhaltung. Sie besitzt Methoden für die Berechnung des aktuellen Fehlers der globalen Impuls- und Energieerhaltung.



## 9. ANWENDUNG FÜR DIE BERECHNUNG EINES IMPAKTVORGANGES

In diesem Kapitel soll anhand einer beispielhaften Impaktberechnung die Anwendbarkeit des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens zur adaptiven Kopplung der SPH-Methode mit Finiten Elementen demonstriert werden. Dabei werden in einer idealisierten, zweidimensionalen Betrachtung die Auswirkungen verschiedener Parameter der Kopplung, insbesondere der Wahl der Auflösung, auf das Ergebnis untersucht und mit den Resultaten reiner FE- und reiner SPH-Berechnungen verglichen. Die entwickelte adaptive Kopplung ist auch für dreidimensionale Berechnungen einsetzbar, dies zeigt der Ausblick auf eine dreidimensionale Berechnung des Penetrationsvorganges am Schluß des Kapitels.

Als Postprozessor zur Visualisierung der Ergebnisse wurde in der vorliegenden Arbeit das Programm „xplot“ der Los Alamos National Laboratories, USA, verwendet.

### 9.1 Betrachteter Impaktvorgang

Die Abbildung 9.1 zeigt das Ergebnis eines 1996 am Ernst-Mach-Institut, Freiburg, durchgeführten Penetrationsversuches (Weber, Hohler & Stilp, 1996). Dabei wurde ein 5.65 cm langes Projektil aus einer Wolfram-Sinter-Legierung auf ein aus drei Aluminiumplatten bestehendes Ziel geschossen. Zur Beschleunigung wurde eine zur Pulverkanone umgebaute Leichtgaskanone verwendet. Nach dem Versuch wurden Ziel und Projektil, wie in der Abbildung dargestellt, aufgeschnitten. Die Aluminiumplatten waren je 12.5 · 12.5 cm hoch bzw. breit und je 4 cm dick, sie sollten das Verhalten eines einzigen, 12 cm dicken Aluminiumblockes modellieren und wurden an allen vier Ecken verschraubt. Die Platten bestanden aus einer Aluminiumlegierung mit der Bezeichnung 6061-T651. Die Geschwindigkeit des Projektils bei dem dargestellten Versuch lag mit 650 m/s gerade am sogenannten ballistischen Limit: Das Projektil konnte das Ziel vollständig perforieren, besaß jedoch keine Restgeschwindigkeit mehr bzw. blieb in diesem Fall sogar stecken.

Wie in der Abbildung gut zu erkennen ist, verformt sich das Projektil während des Impaktvorganges praktisch nicht. An der Stelle, an der das Projektil eindringt, entsteht eine sogenannte Scherlippe. Der Penetrationskanal verläuft geradlinig, an der Austrittsstelle und den Plattenoberflächen sind die plastischen Verformungen zu erkennen.

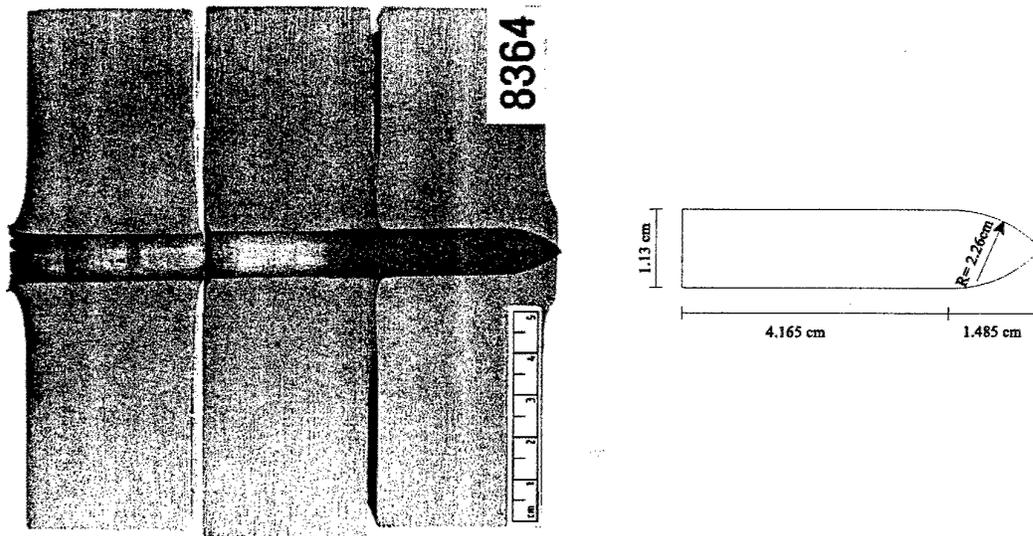


Abbildung 9.1: Ergebnis des am Ernst-Mach-Institut, Freiburg, 1996 durchgeführten Penetrationsversuches und Darstellung der Projekttilgeometrie (Weber, Hohler & Stilp, 1996)

## 9.2 Zweidimensionale Simulation

Die Berechnung des Impaktvorganges erfolgt unter der Vereinfachung auf ein zweidimensionales, ebenensymmetrisches Problem. Der gewählte ebene Dehnungszustand kann die tatsächlichen Verhältnisse des Versuchs nur unvollkommen abbilden, denn die Steifigkeit ist aufgrund der fehlenden Umfangsspannungen zu gering. Zu beachten ist daneben auch, daß sich durch die Ebenensymmetrie das Verhältnis der Massen von Ziel und Penetrator verändert. Die zweidimensionale Simulation eignet sich jedoch gut zur Verifikation der entwickelten Kopplung durch Vergleiche mit reinen FE- bzw. SPH-Diskretisierungen. Die zweidimensionale Idealisierung bietet vor allem den Vorteil des geringeren Rechenaufwandes. Ein weiterer Grund für die Vereinfachung ist, daß die Verwendung eines Master-Slave-Verfahrens für den Kontakt zwischen Projektiloberfläche und Penetrationskanal unbedingt erforderlich ist. Dieses Verfahren wurde jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur für zweidimensionale Berechnungen implementiert, da der Schwerpunkt auf der Erstellung eines adaptiv anwendbaren Verfahrens, das die Kopplung von Partikeln und Elementen innerhalb eines zusammenhängenden Körpers erlaubt, lag. Master-Slave Algorithmen-für den Kontakt zwischen Elementen und Knoten für dreidimensionale Probleme sind jedoch bekannt (vgl. z. B. Thoma & Vinckier, 1994) und können, wie für den zweidimensionalen Fall in Kapitel 7 gezeigt wurde, auf den Kontakt zwischen Elementen und Partikeln erweitert werden.

Die Geometrie des zweidimensionalen Problems ist in Abbildung 9.2 dargestellt. Für den Aluminiumblock sind zwei Bereiche angegeben, in denen eine unterschiedliche Diskretisierung (FE oder SPH) vorgenommen wurde. Die Geschwindigkeiten in  $y$ -Richtung wurden sowohl am oberen als auch am unteren Rand zu Null gesetzt. Die Symmetriebedingung am unteren Rand ist dabei durch die tatsächliche Symmetrie des Problems zur  $x$ -Achse begründet. Die Symmetriebedingung am oberen Rand ist einzuführen, um die zweidimensionale Simulation den tatsächlichen dreidimensionalen Verhältnissen ähnlicher zu machen. Ohne diese obere Randbedingung würde eine starke Verformung des Aluminiumblockes am oberen Rand eintreten, die in der Realität durch die Spannungen in tangentialer Richtung um den Penetrationskanal verhindert wird.

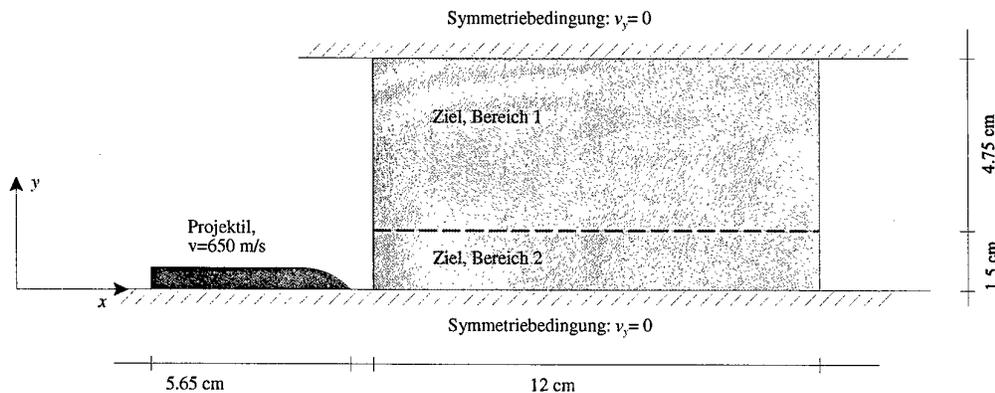


Abbildung 9.2: Geometrie des ebenensymmetrischen Problems mit Randbedingungen

Das Projektil wurde in den Berechnungen, in denen es mit Finiten Elementen diskretisiert wurde, entsprechend den Beobachtungen des Versuches als starrer Körper mit einer Dichte von  $17.67 \text{ g/cm}^3$  modelliert. Daneben wurde auch eine Simulation durchgeführt, bei der das Projektil mit Partikeln diskretisiert wurde. Sowohl bei mit Partikeln diskretisierten Projektil als auch bei dem Aluminiumblock wurde für die Druck-Dichte-Energie-Beziehung eine Schock-Zustandsgleichung (vgl. Kapitel 2) verwendet, die entsprechenden Parameter sind in der Tabelle 9.1 angegeben. Die Beschreibung der Materialfestigkeit erfolgte unter Verwendung eines elastoplastischen Materialgesetzes mit temperatur- und dehnratenabhängiger Fließgrenze nach Johnson & Cook (1993), die eingesetzten Parameter sind ebenfalls der nachstehenden Tabelle 9.1 zu entnehmen. Es sei darauf hingewiesen, daß bei der Berechnung kein Versagensmodell verwendet wurde. Damit tritt Materialversagen nur aufgrund numerischer Effekte ein, etwa wenn der Abstand zweier Partikel zu groß wird oder Elemente bei großer Verzerrung gelöscht („erodiert“) werden.

Parameter der Zustandsgleichung			
		Projektil (Wolfram-Sinter)	Ziel (Aluminium6061-T651)
Dichte $\rho$	[g/cm <sup>3</sup> ]	17.67	2.785
Grüneisen- $\Gamma$	[]	1.54	2.00
$C$	[cm/ $\mu$ s]	0.4029	0.5328
$S$	[]	1.237	1.338
spezifische Wärmekapazität $c$	[J/(gK)]	0.134	0.875
Parameter des Festigkeitsmodelles			
Schubmodul $G$	[Mbar]	1.600	0.276
statische Fließgrenze $\sigma_0$	[Mbar]	0.01506	0.00265
Konstante der Dehnverfestigung $B$	[Mbar]	0.00177	0.00426
Exponent der Dehnverfestigung $n$	[]	0.12	0.34
Faktor der Dehnratenabhängigkeit $C$	[]	0.016	0.015
Exponent der Temperaturabhängigkeit $m$	[]	1	1
Raumtemperatur $T_R$	[K]	300	300
Schmelztemperatur $T_S$	[K]	1723	775

*Tabelle 9.1: Verwendete Materialparameter*

Die Ergebnisse der Berechnungen werden im folgenden anhand grafischer Darstellungen ausgewertet. Hierzu werden einerseits Ergebnisse zu bestimmten Zeitschritten in der  $x, y$  Ebene farbig dargestellt, andererseits Ergebnisse an Referenzpunkten verglichen. Die Lage der betrachteten Referenzpunkte ist Abbildung 9.3 zu entnehmen.

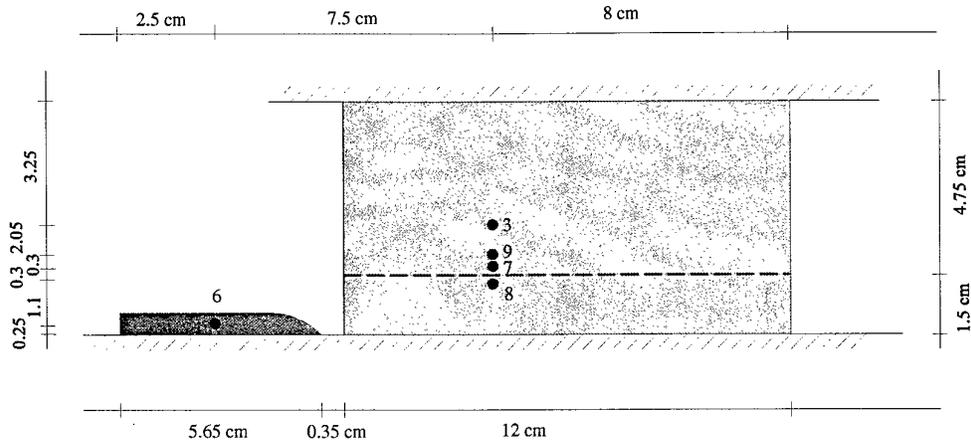


Abbildung 9.3: Lage und Nummern der betrachteten Referenzpunkte

Bezeichnung	Verfeinerungsstufe	Elementseitenlänge [cm]	Partikel-Abstand [cm]	Umwandlung/Erosion bei $\epsilon_{\text{eff.pt.}}$	Partikel/Elementseite	Normalisierung
FE 1	1	0.3125	/	1.50	/	/
FE 2	2	0.15625	/	1.50	/	/
FE 3	3	0.1042	/	1.50	/	/
FE 4	4	0.0781	/	1.50	/	/
FE 3 (epsplast=1.00)	3	0.1042	/	1.00	/	/
FE 3 (epsplast=1.25)	3	0.1042	/	1.25	/	/
FE 3 (epsplast=1.50)	3	0.1042	/	1.50	/	/
FE 3 (epsplast=1.75)	3	0.1042	/	1.75	/	/
SPH 1:2	2	/	0.15625	0	2	Nein
SPH 1:3	3	/	0.1024	0	3	Nein
FE-SPH 1:1	1	0.3125	0.3125	0	1	Nein
FE-SPH 1:2	2	0.3125	0.15625	0	2	Nein
FE-SPH 1:3	3	0.3125	0.1042	0	3	Nein
FE-SPH 1:4	4	0.3125	0.0781	0	4	Nein
FE-NSPH 1:2	2	0.3125	0.15625	0	2	Ja
FE-SPH (Adaptiv) 1:3	3	0.3125	0.1042	0.2	3	Nein
FE-NSPH (Adaptiv) 1:3	3	0.3125	0.1042	0.2	3	Ja
FE-SPH (SPH-Proj.) 1:2	2	0.3125	0.15625	0	2	Nein

Tabelle 9.2: Betrachtete Berechnungsvarianten

### 9.2.1 Berechnungsvarianten

Eine Übersicht über die im folgenden betrachteten Berechnungsvarianten gibt Tabelle 9.2. In allen Berechnungen wurde das Projektil als Starrkörper mit finiten Elementen, der Kontakt mit den Elementen bzw. Partikeln des Ziels als Master-Slave-Kontakt modelliert. Dabei wurde keine Reibung berücksichtigt. Nur in der letzten in der Tabelle aufgeführten Rechnung, die mit FE-SPH (SPH-Proj.) bezeichnet ist, wurde das Projektil mit Partikeln modelliert. Die Fälle FE 1 bis FE 3 ( $\epsilon_{\text{plast}}=1.75$ ) sind zum Vergleich durchgeführte reine FE-Rechnungen mit unterschiedlichen Auflösungen bzw. einem unterschiedlichen Wert für die effektive plastische Dehnung  $\epsilon_{\text{eff.,pl}}$ , bei der ein Element aus der Rechnung entfernt wird. In den mit SPH und FE-SPH bezeichneten Fällen wurden die Elemente zu Beginn der Berechnung in Partikel umgewandelt, und zwar in den SPH-Fällen der gesamte Aluminiumblock, in den FE-SPH-Fällen nur der Bereich 2. Für die Kopplung der zum Aluminiumblock gehörenden Partikel mit den Elementen desselben Körpers wurde in allen Fällen die in Kapitel 7 erläuterte Kopplung auf der Basis einer hybriden Approximation mit Berechnung der Kräfte auf die Elementknoten aus den Beschleunigungsanteilen in den SPH-Summengleichungen (dort als HA-F-Kopplung bezeichnet) verwendet. Die Anzahl der Integrationspunkte pro Elementseite entsprach dabei immer der Anzahl der Partikel pro Elementseite.

Die verwendeten Diskretisierungsvarianten werden in den Abbildungen 9.4 und 9.5 veranschaulicht. Die dargestellte Netzfeinheit entspricht ist die größte, in den Fällen FE 1 und bei den verschiedenen Varianten der Kopplung verwendete. Abbildung 9.4 zeigt links zunächst die reine FE-Diskretisierung, rechts die Anwendung der Kopplung von SPH- und FE-Methode bei der Diskretisierung des Aluminiumblockes. Dabei wurden zu Berechnungsbeginn alle Elemente in einem Abstand von 1.5 cm von der Symmetrieachse in Partikel umgewandelt. Die Anwendung der adaptiven Kopplung zeigt Abbildung 9.5. Wie in Tabelle 9.2 angegeben, wurden die Elemente während der Rechnung in Partikel umgewandelt, wenn eine effektive plastische Dehnung  $\epsilon_{\text{eff.,pl}}=0.2$  erreicht war.

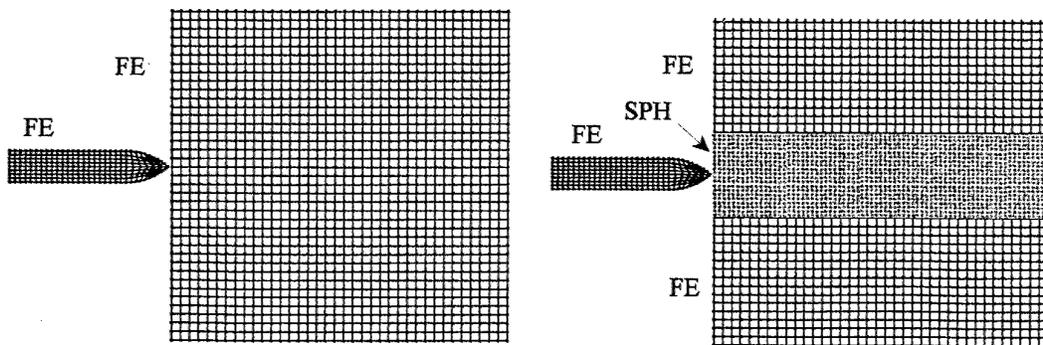


Abbildung 9.4: Betrachtete Diskretisierungen. Links: reine FE-Diskretisierung, rechts: Kopplung mit SPH-Methode und sofortiger Umwandlung (nicht adaptiv, 2 Partikel pro Elementseite)

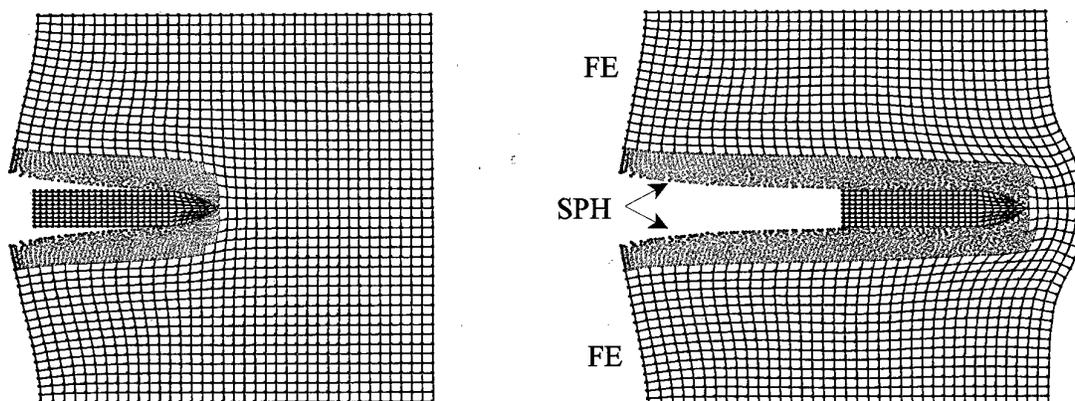


Abbildung 9.5: Entwicklung der Diskretisierung bei adaptiver Kopplung (3 Partikel pro Elementseite). Links: nach 100  $\mu\text{s}$ , rechts: nach 500  $\mu\text{s}$ .

### 9.2.2 Geschwindigkeitsentwicklung

Die Geschwindigkeitsentwicklung über die Zeit in den Referenzpunkten 3 und 6 ist in den folgenden Diagrammen wiedergegeben. Punkt 6 gibt dabei die Geschwindigkeit im Projektil bzw. Penetrator an, Punkt 3 die Geschwindigkeit im Aluminiumblock. In der reinen FE-Rechnung mit Erosion verzerrter Elemente erfolgt eine vollständige Penetration des Aluminiumblockes, nach der Penetration hat das Projektil eine gegenüber dem Ziel um 150 bis 350 m/s höhere Restgeschwindigkeit. Die Netzfeinheit hat zumindest in dem Bereich, in dem sie hier variiert wurde, auf die Geschwindigkeitsentwicklung nur geringen Einfluß, tendenziell steigt sie mit der Netzfeinheit leicht an. Dem Vergleich der Geschwindigkeitsentwicklung bei Variation des Erosionskriteriums ist zu entnehmen, daß ein Wert von  $\epsilon_{\text{eff,pl.}}=1.00$  deutlich höhere Restgeschwindigkeiten liefert, während die Variation bei Werten von 1.25, 1.5 und 1.75 nur noch gering ist.

In allen übrigen Fällen, in denen die SPH-Methode alleine oder in der Kopplung mit finiten Elementen zur Simulation des Penetrationsvorganges benutzt wurde, bleibt das Projektil nach ca. 450 bis 500  $\mu\text{s}$  im Aluminiumblock stecken. Diese Berechnungen zeigen insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung der Geschwindigkeitsentwicklungen, kleine Unterschiede sind jedoch vorhanden. So ist im Vergleich der beiden reinen SPH-Rechnungen zu erkennen, daß die Verzögerung des Projektils mit zunehmender Verfeinerung abnimmt. Dieses Ergebnis spiegelt sich auch bei der Kopplung mit verschiedenen Auflösungsstufen wieder. Daneben ist zu beobachten, daß die Geschwindigkeit des Projektils bei Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens etwas geringer wird. Die Verwendung der adaptiven Kopplung liefert im Vergleich die größte Verzögerung.

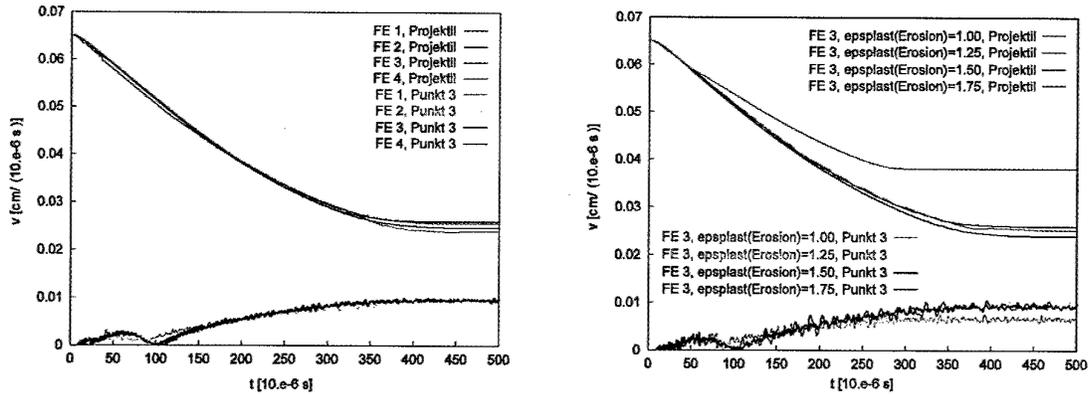


Abbildung 9.6: Vergleich der Geschwindigkeitsentwicklung im Projektil und Aluminiumblock (Punkt 3) bei reiner FE-Diskretisierung. Verschiedenen Netzfeinheiten (links), Variation des Erosionskriteriums (rechts).

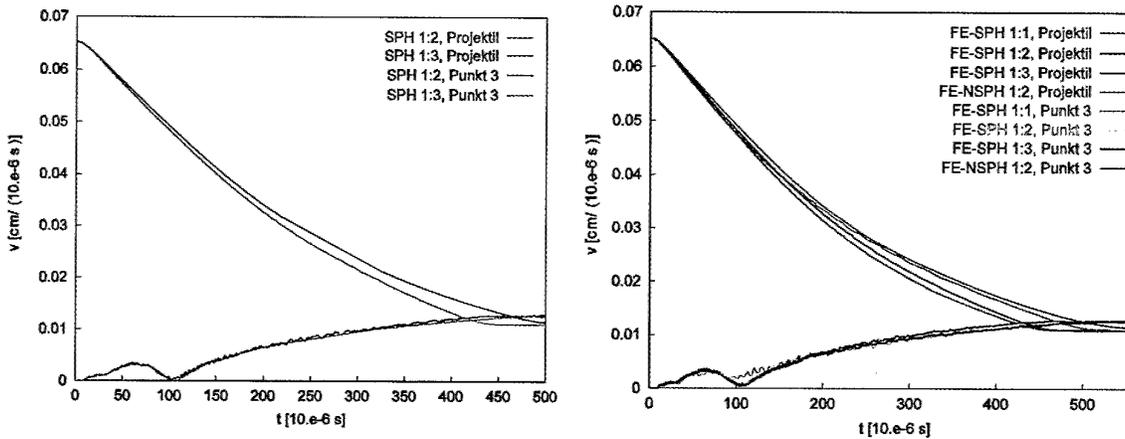


Abbildung 9.7: Vergleich der Geschwindigkeitsentwicklung im Projektil und Aluminiumblock (Punkt 3). Links: bei reiner SPH-Diskretisierung und verschiedenen Auflösungen (Partikelgrößen). Rechts: Bei Kopplung von SPH-Methode und FE (nicht adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH-Bereich.

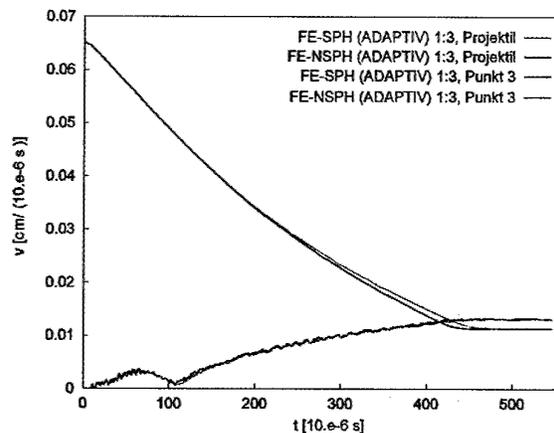


Abbildung 9.8: Geschwindigkeitsentwicklung im Projektil und Aluminiumblock (Punkt 3) bei adaptiver Kopplung von SPH-Methode und FE

In den Abbildungen 9.9 und 9.10 sind Geschwindigkeitsverteilungen verschiedener Berechnungsfälle der Verfeinerungsstufe 3 einander gegenübergestellt. In den Fällen, in denen die Kopplung verwendet wurde (9.10), ist der mit Elementen diskretisierte Bereich des Aluminiumblockes durch die geringere Punktdichte (es wurde im Postprozessor nur ein Punkt pro Knoten erzeugt) zu erkennen. Die Übereinstimmung ist insgesamt gut, bei allen Fällen, in denen die NSPH- Methode verwendet wurden, ist allerdings ein etwas vergrößerter Bereich höherer Geschwindigkeiten vor der Projektilspitze zu erkennen. Dieser ist auf die höhere Dispersion der NSPH-Methode zurückzuführen.

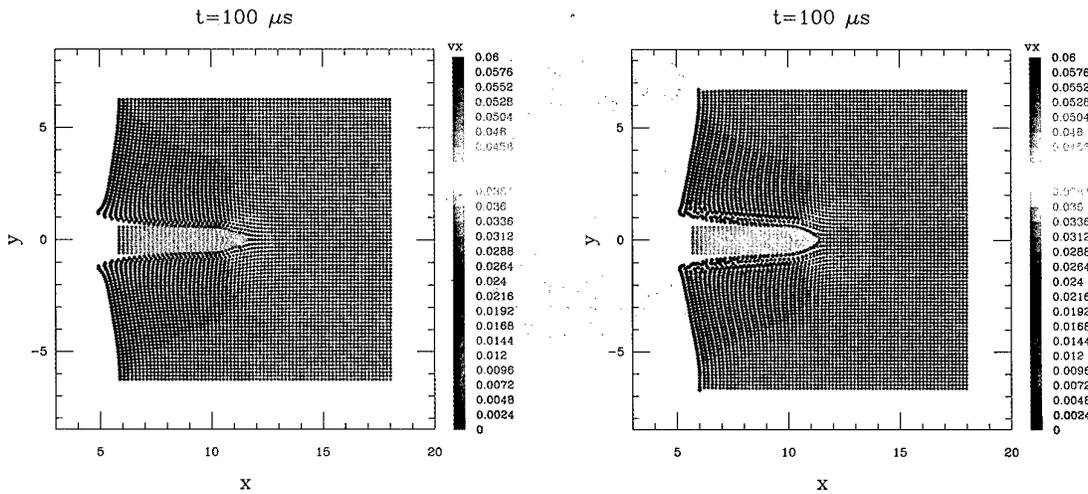


Abbildung 9.9: Vergleich der Geschwindigkeitsverteilung nach 100  $\mu$ s für die Fälle FE 3 (reine FE-Diskretisierung) und SPH 1:3 (reine SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes).

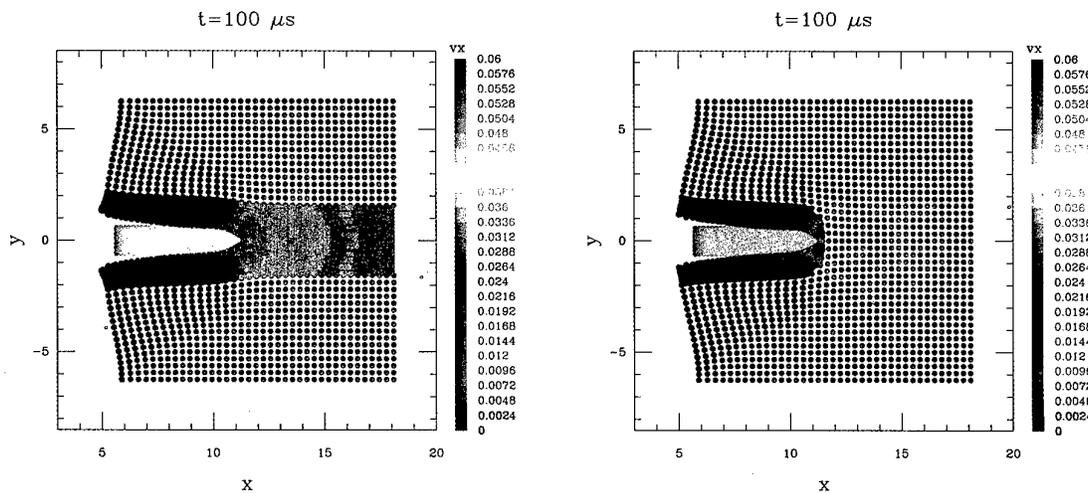


Abbildung 9.10: Vergleich der Geschwindigkeitsverteilung nach 100  $\mu$ s für die Fälle FE-NSPH 1:3 (Anwendung der Kopplung mit dem NSPH-Verfahren, nicht adaptiv) und FE-NSPH (adaptiv) 1:3 (Anwendung der adaptiven Kopplung mit dem NSPH-Verfahren).

### 9.2.3 Plastische Dehnungen

In diesem Abschnitt werden die Berechnungsergebnisse anhand der effektiven plastischen Dehnung nach  $500 \mu\text{s}$  verglichen. Zu diesem Zeitpunkt ist der Penetrationsvorgang abgeschlossen, wie die im vorangegangenen Abschnitt dargestellte Geschwindigkeitsentwicklung zeigt.

Abbildung 9.11 zeigt zunächst das Ergebnis der reinen FE-Rechnung mit Erosion (FE 3). Wie bereits erläutert, erfolgt eine vollständige Penetration, das Projektil bleibt nicht stecken.

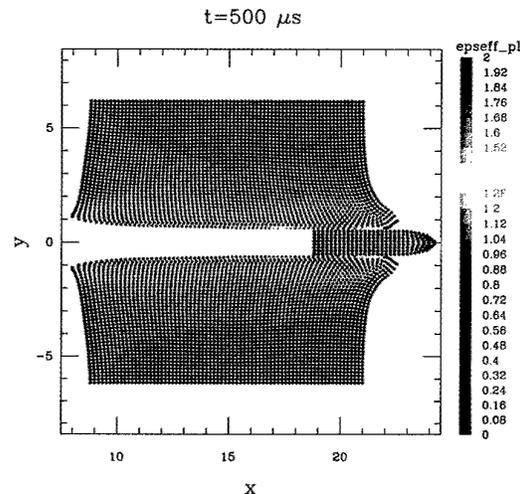


Abbildung 9.11: Effektive plastische Dehnung nach  $500 \mu\text{s}$ , Variante FE 3 (reine FE-Diskretisierung).

Die Ergebnisse der Rechnungen, in denen der Aluminiumblock vollständig durch Partikel diskretisiert wurde (SPH 1:2, SPH 1:3), sind in Abbildung 9.12 dargestellt. Das Projektil bleibt in beiden Fällen stecken, dennoch stimmt die Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung im Ziel gut mit den Ergebnissen der reinen FE-Rechnung überein. An der Stelle, an der das Projektil bei höherer Impactgeschwindigkeit austreten würde, ist eine typische Instabilität der SPH-Methode zu beobachten, die bei der feineren Auflösung zum „numerischen Bruch“ führt. Sie ist auch eine mögliche Ursache für die etwas höhere Penetrationstiefe und die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene geringere Verzögerung des Projektils bei feinerer Auflösung im SPH-Bereich.

Die Ergebnisse der in Abbildung 9.13 präsentierten Berechnungen mit der Kopplung von SPH und FE stimmen hinsichtlich Penetrationstiefe und Verteilung der plastischen Dehnung gut mit den Ergebnissen bei Diskretisierung des Aluminiumblockes nur mit der SPH-Methode überein. Pro Element bzw. Partikel ist in der Abbildung ein Spannungspunkt dargestellt, der mit Partikeln diskretisierte Bereich ist an der größeren Punktdichte zu erkennen. Der bereits erwähnte numerische Bruch an der Austrittsstelle tritt hier an der Grenzfläche zwischen Partikeln und Elementen in Erscheinung. Da er jedoch an der selben Stelle auch in der reinen SPH-Rechnung auftritt, ist die Kopplung nicht als Ursache für dieses Verhalten anzusehen, sie ist

jedoch offensichtlich hierfür besonders empfindlich.

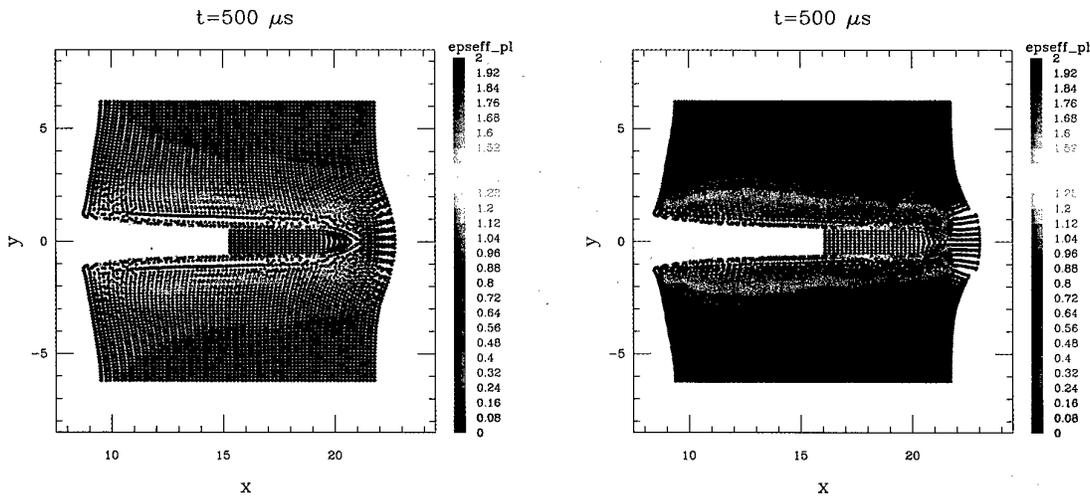


Abbildung 9.12: Effektive plastische Dehnung nach  $500 \mu\text{s}$ , Varianten SPH 1:2 und SPH 1:3 (reine SPH-Diskretisierung für den Aluminiumblock).

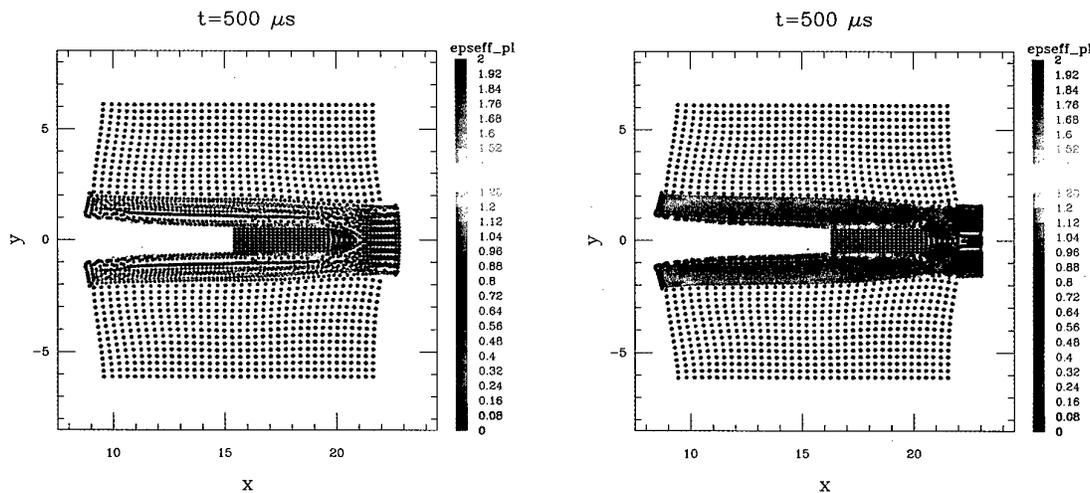


Abbildung 9.13: Effektive plastische Dehnung nach  $500 \mu\text{s}$ , Varianten FE-SPH 1:2 und FE-SPH 1:3 (Diskretisierung des Aluminiumblockes mit FE-SPH Kopplung, nicht adaptiv).

Die Verwendung der Kopplung in Verbindung mit dem normalisierten SPH-Verfahren (FE-NSPH 1:2) verbessert das Ergebnis insofern, als die Auswirkungen der Instabilität im potentiellen Austrittsbereich vermindert werden. Der numerische Bruch tritt später auf, was in der folgenden Abbildung daran zu erkennen ist, daß sich im betreffenden Bereich eine geringere Diskontinuität der Verformungen und eine deutliche ausgeprägte Ausbeulung zeigen.

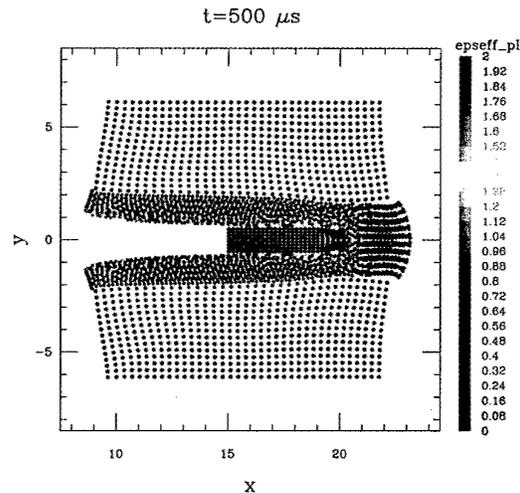


Abbildung 9.14: Effektive plastische Dehnung nach  $500 \mu s$ , Variante FE-NSPH 1:2 (Diskretisierung des Aluminiumblockes mit FE-NSPH Kopplung, nicht adaptiv).

Wie im Laufe einer Berechnung Elemente adaptiv in Partikel umgewandelt werden können, ist Abbildung 9.15 zu entnehmen. In der betreffenden Berechnungsvariante (FE-NSPH (Adaptiv) 1:3) erfolgte die Umwandlung bei Erreichen einer effektiven plastischen Dehnung von 0.2. Dieser Wert, der zunächst relativ niedrig erscheint, gewährleistet, daß immer genügend Partikel zwischen Projektilspitze und den noch nicht umgewandelten Finiten Elementen des Aluminiumblockes vorhanden sind. Dadurch wird der Kontakt zwischen Projektil und Ziel immer als Master-Slave-Kontakt zwischen Partikeln und Elementen berechnet. Wenn direkter Kontakt zwischen den Elementen des Ziels und des Projektils auftreten würde, ergäben sich wegen der höheren Masse der Elementknoten höhere Kontaktkräfte, die zu stärkeren Oszillationen der Elemente führten. Diese wiederum übertragen sich durch die Kopplung auf die Partikel und führen zu unerwünschten numerischen Effekten im (N)SPH-Bereich.

Wird die adaptive Umwandlung wie in Abbildung 9.16 in Verbindung mit dem Standard-SPH-Verfahren verwendet, ergibt sich praktisch das gleiche Berechnungsergebnis. Die Umwandlung der Elemente in Partikel erfolgt jedoch nicht so kontinuierlich wie bei der Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens. Wie in Abbildung 9.16 zu erkennen, haben einige Elemente etwa auf der Höhe des Projektilendes auch nach  $500 \mu s$  noch nicht das Umwandlungskriterium ( $\epsilon_{\text{eff., plast}} \geq 0.2$ ) erfüllt.

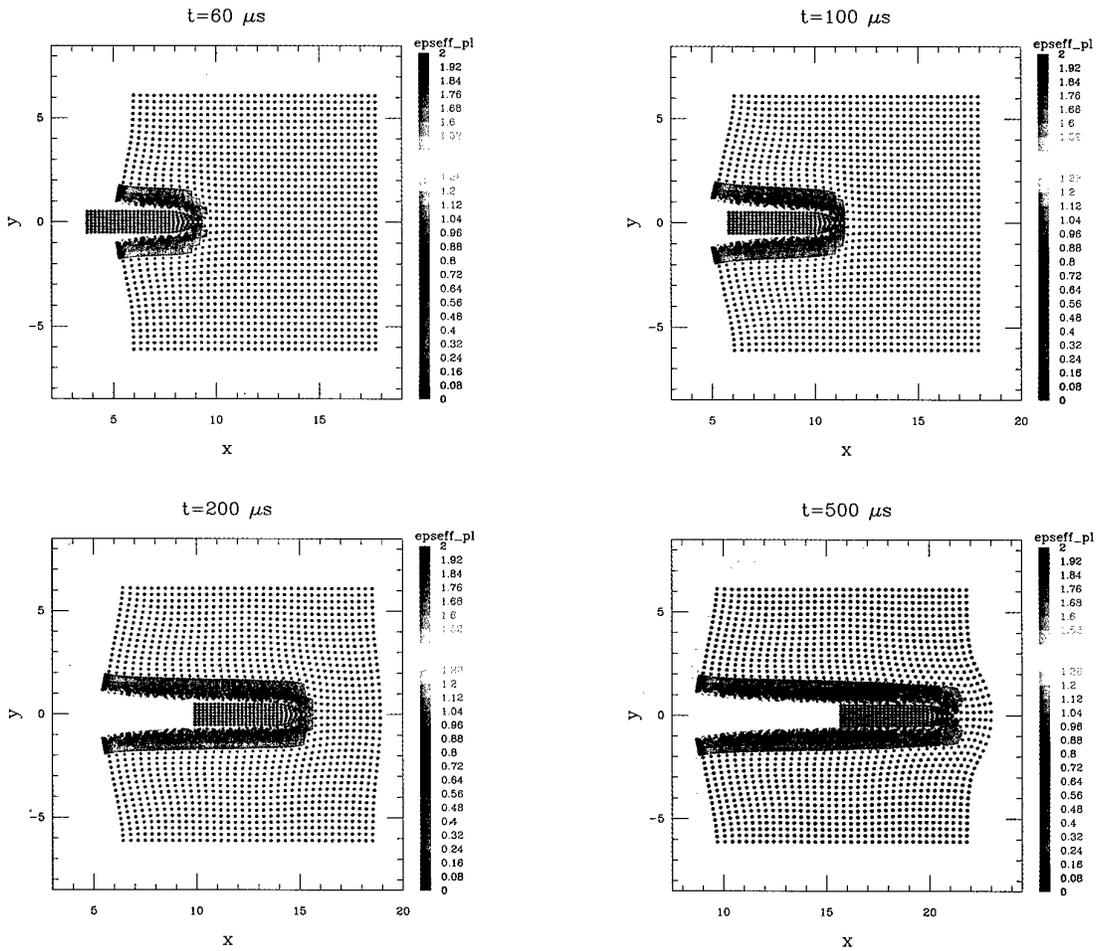


Abbildung 9.15: Effektive plastische Dehnung nach 60, 100, 200 und 500  $\mu\text{s}$ , Variante FE-NSPH (Adaptiv) 1:3 (Anwendung der adaptiven Kopplung mit dem NSPH-Verfahren).

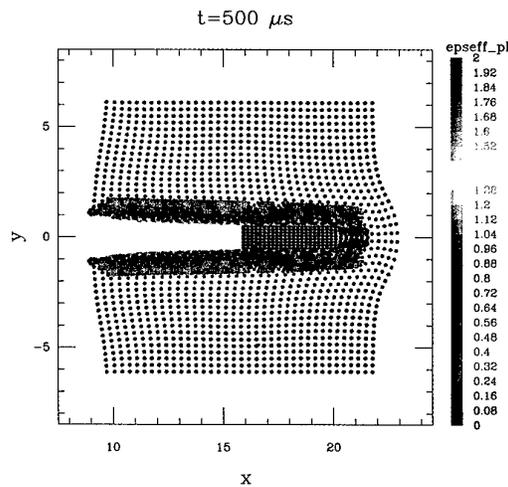


Abbildung 9.16: Effektive plastische Dehnung nach 500  $\mu\text{s}$ , Variante FE-SPH (Adaptiv) 1:3 (Anwendung der adaptiven Kopplung mit dem SPH-Verfahren)

Abschließend ist in Abbildung 9.17 das Ergebnis der Variante FE-SPH (SPH-Proj.) 1:2 dargestellt, in der das Projektil nicht als starrer Körper mit finiten Elementen, sondern mit Partikeln diskretisiert wurde. Der Kontakt zwischen Projektil und Ziel wurde dabei nur durch die normale Interaktion zwischen Partikeln berechnet. Hierdurch wird ein Verhalten simuliert, als ob beide Körper miteinander verschweißt wären, entsprechend ergeben sich eine deutlich verringerte Penetrationstiefe und größere plastische Dehnungen an der Kontaktfläche. Das Projektil bleibt bereits nach ca.  $320 \mu\text{s}$  stecken, es verformt sich, und es kommt zur Ablösung einzelner Partikel (rechte Seite der Abbildung 9.17). Das Beispiel zeigt, daß die Berechnung des Impakts zweier nur mit Partikeln diskretisierter Körper unbedingt die Einführung eines besonderen Verfahrens zur Kontaktberechnung erfordert.

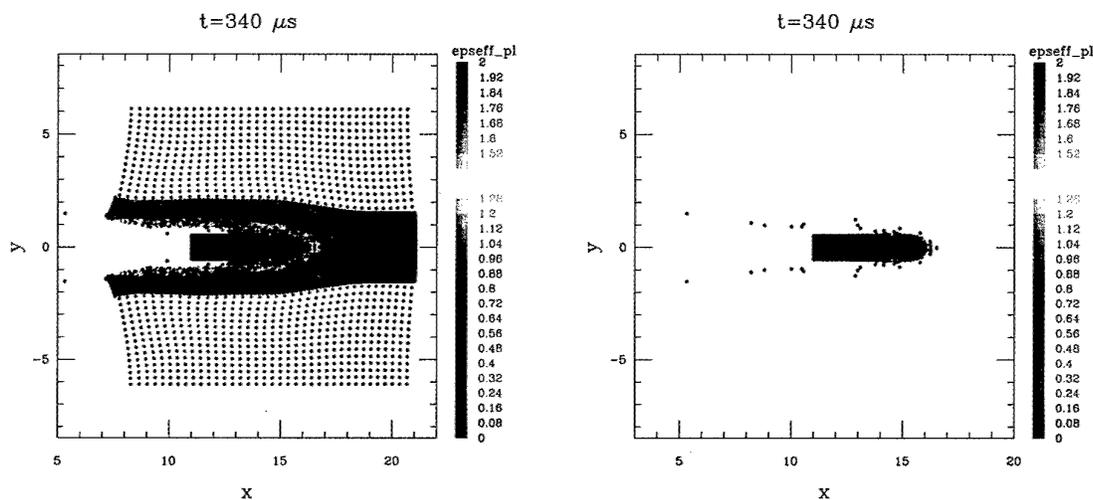


Abbildung 9.17: Effektive plastische Dehnung nach  $340 \mu\text{s}$ , Variante FE-SPH (SPH-Proj.) 1:2 (Kopplung mit dem SPH-Verfahren, nicht adaptiv, SPH-Diskretisierung des Projektils). Rechts sind die Partikel des Projektils alleine dargestellt.

#### 9.2.4 Druckentwicklung

In diesem Abschnitt werden die in den verschiedenen Varianten berechneten Druckentwicklungen verglichen. Alle Druckangaben sind in Megabar ( $10^5$  Megapascal).

Abbildung 9.18 zeigt die Druckwelle nach 10 bzw.  $20 \mu\text{s}$  in der Variante FE-SPH 1:4. Die Ausbreitung erfolgt zunächst kreisförmig von der Stelle aus, an der das Projektil in den Aluminiumblock eindringt. Nach  $20 \mu\text{s}$  hat die Druckwelle das gegenüberliegende Ende des Aluminiumblockes fast erreicht und wird von dort im weiteren Verlauf der Berechnung als Zugwelle reflektiert. Bedingt durch die hohe Partikeldichte im SPH-Bereich ist die Druckwellenfront dort steiler ausgeprägt als im FE-Bereich. Der Kopplungsalgorithmus zwischen Partikeln und Elementen beeinflusst die Druckwellenausbreitung ansonsten nicht.

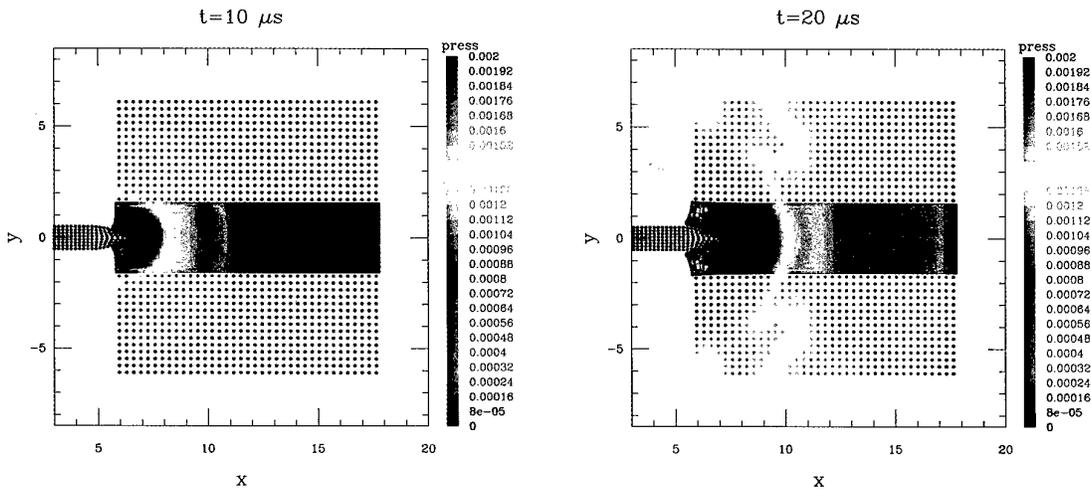


Abbildung 9.18: Ausbreitung der Druckwelle nach  $10 \mu s$  und  $20 \mu s$ , Variante FE-SPH 1:4 (Kopplung mit dem SPH-Verfahren, nicht adaptiv).

Die Abbildungen 9.19 bis 9.21 erlauben einen Vergleich der mit verschiedenen Diskretisierungen berechneten Drücke im Aluminiumblock nach  $100 \mu s$ . In der reinen FE-Diskretisierung (Abbildung 9.19) ist insbesondere bei der höheren Auflösung erkennbar, wie sich Druck- und Zugwellen abwechselnd von der Projektilspitze auszubreiten scheinen. Dieser Effekt ist auf die Erosion der verzerrten Elemente zurückzuführen, das Löschen eines Elementes führt zu einer kurzfristigen Entspannung, bis das dem Projektil nächste Element wieder in Kontakt mit diesem tritt. Im übrigen ist eine gute Übereinstimmung sowohl mit den SPH-Varianten (Abbildung 9.20) als auch mit den Varianten der adaptiven Kopplung (Abbildung 9.21) zu erkennen. Instabilitäten des Standard-SPH-Verfahrens zeigen sich in Form von „Riffeln“. Das normalisierte SPH-Verfahren, das mit der adaptiven Kopplung eingesetzt wurde, bringt hier eine Verbesserung, wie beim Vergleich der Bereiche hohen Druckes (rot) um die Projektilspitze in Abbildung 9.21 zu erkennen ist.

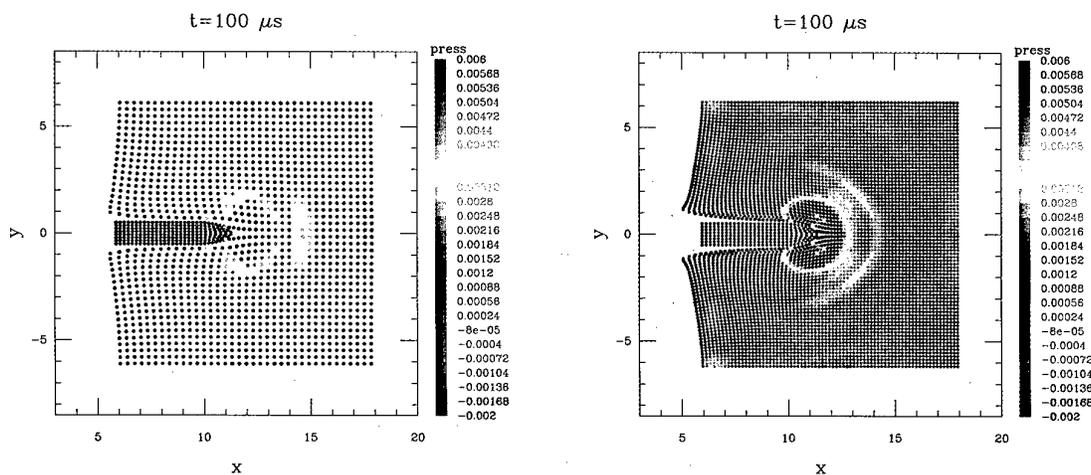


Abbildung 9.19: Vergleich der berechneten Druckverteilung nach  $100 \mu s$ , Varianten FE 1 (links) und FE 3 (rechts) (reine FE-Diskretisierung).

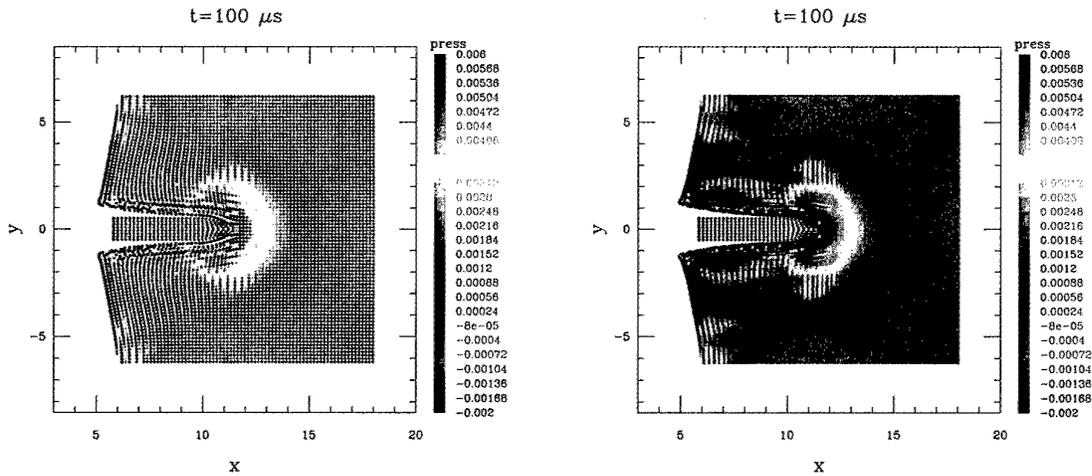


Abbildung 9.20: Vergleich der berechneten Druckverteilung nach  $100 \mu\text{s}$ , Varianten SPH 1:2 (links) und SPH 1:3 (rechts) (reine SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes).

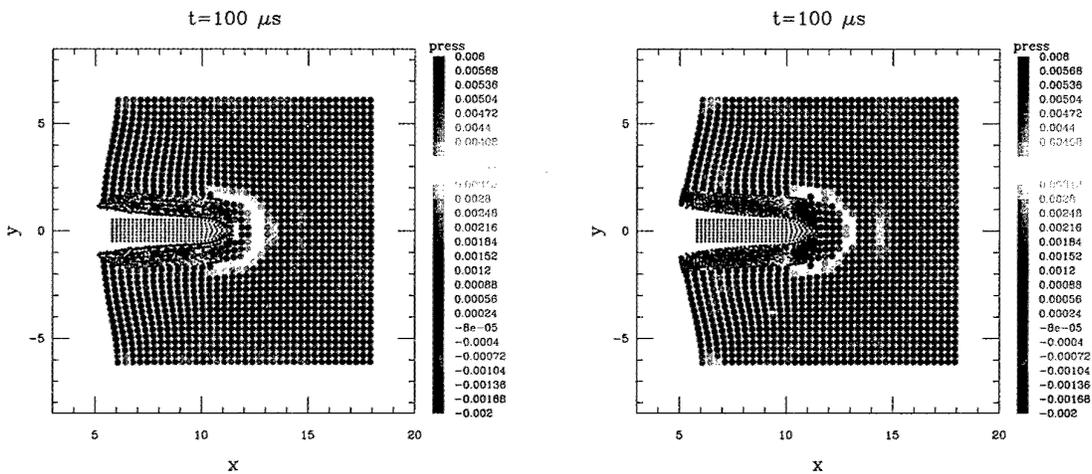


Abbildung 9.21: Vergleich der berechneten Druckverteilung nach  $100 \mu\text{s}$ , Varianten FE-SPH (adaptiv) 1:3 (links) und FE-NSPH (adaptiv) 1:3 (rechts) (Anwendung der adaptiven Kopplung).

Die Druckentwicklungen in Referenzpunkt 3 (3 cm oberhalb der Projektilachse) von 0 bis  $100 \mu\text{s}$  sind den folgenden Diagrammen zu entnehmen. In den Fällen SPH 1:2 und SPH 1:3 liegt der Referenzpunkt in einem Partikel, in den übrigen Fällen in einem Element. Die Varianten, in denen nur mit Elementen diskretisiert wurde, zeigen die bereits erwähnten Oszillationen durch die Erosion der verzerrten Elemente. Diese nehmen auch bei höherer Auflösung nicht ab. Der Master-Slave-Algorithmus für den Kontakt zwischen Partikeln und Elementen ist jedoch ebenfalls für Oszillationen verantwortlich, wie aus den Druckverläufen der anderen Fälle ersichtlich ist. Diese verringern sich bei der Verwendung einer höheren Auflösung im SPH-Bereich (kleinere Partikel).

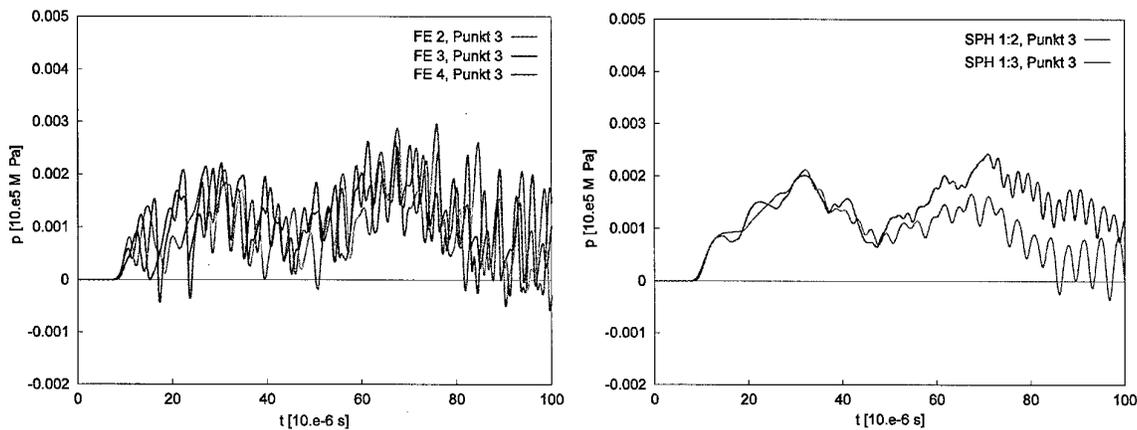


Abbildung 9.22: Vergleich der Druckentwicklung im Referenzpunkt 3. Reine FE-Diskretisierung mit verschiedenen Netzfeinheiten (links), reine SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes (rechts).

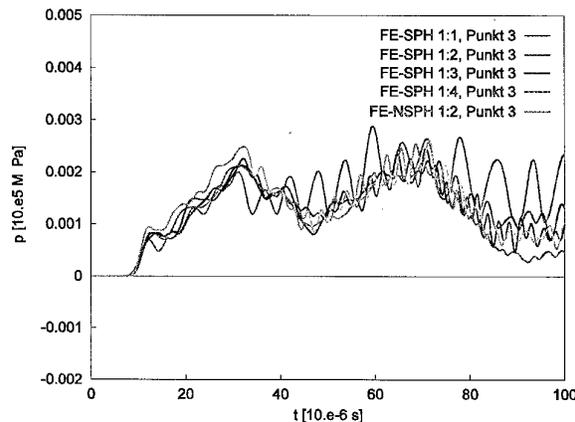


Abbildung 9.23: Vergleich der Druckentwicklung im Referenzpunkt 3 bei Kopplung mit der SPH- bzw. NSPH-Methode (nicht adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH-Bereich.

Die in den folgenden Abbildungen betrachteten Referenzpunkte 7, 8 und 9 ermöglichen die Beurteilung des Einflusses der Druckentwicklung durch die Kopplung. Punkt 7 und 9 liegen im FE-Bereich, Punkt 7 unmittelbar im Element an der Grenzfläche, Punkt 9 im nächsten Element darüber. Punkt 8 liegt im mit Partikeln diskretisierten Bereich.

Abbildung 9.24 zeigt zum Vergleich zunächst die Druckentwicklungen in den Punkten 7 und 8 ohne Kopplung (reine FE- bzw. SPH-Diskretisierung des Ziels), Abbildung 9.25 die mit der Kopplung berechneten Druckverläufe.

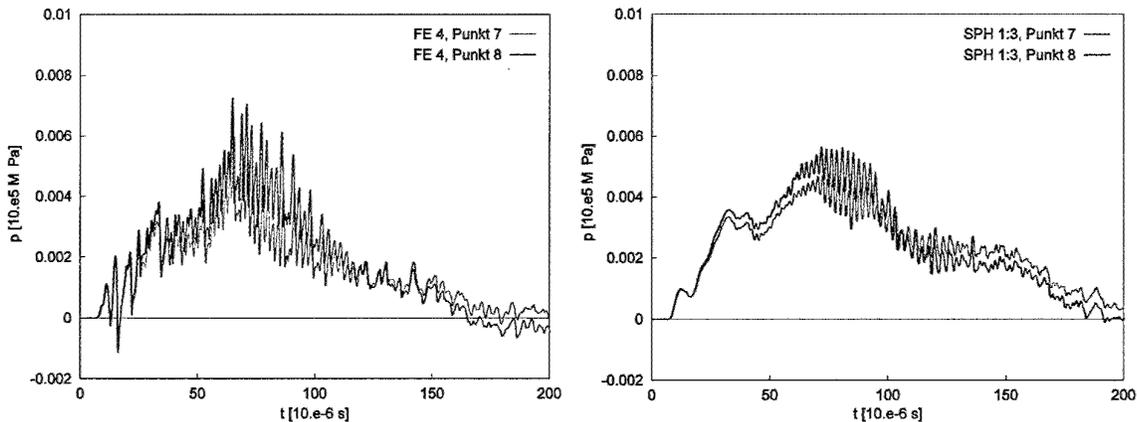


Abbildung 9.24: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 7 und 8 bei reiner FE- (links) und reiner SPH-Diskretisierung (rechts) des Aluminiumblockes.

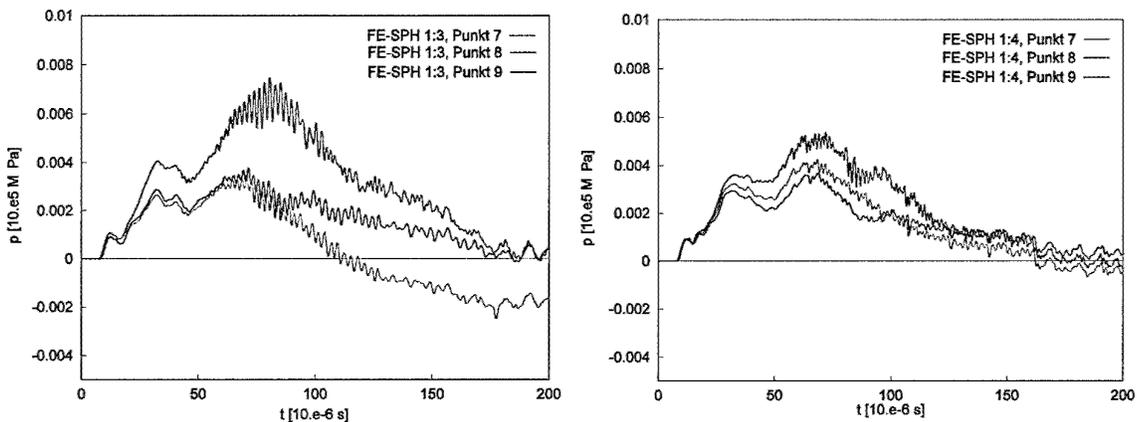


Abbildung 9.25: Vergleich der Druckentwicklung in den Referenzpunkten 7, 8 und 9 bei Anwendung der Kopplung (nicht adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH-Bereich.

In der Variante FE-SPH 1:3 ist zu erkennen, daß der Druckverlauf im Vergleich zur reinen SPH-Diskretisierung (Abbildung 9.24 rechts) insbesondere im unmittelbar an der Grenzfläche in einem Element gelegenen Referenzpunkt 8 durch die Kopplung beeinflusst wird, nach etwa  $120 \mu\text{s}$  treten hier negative Drücke auf. Dies ist bei höherer Auflösung (FE-SPH 1:4) nicht mehr der Fall. Im etwas weiter von der Grenzfläche entfernten Punkt 9 ist dagegen praktisch keine Beeinflussung mehr zu beobachten. Auch der Druckverlauf im SPH-Bereich ist bei der niedrigeren Auflösungen durch die Kopplung beeinflusst (etwas zu hoher Druck in Punkt 8 bei 1:3), bei der höchsten Auflösung ist auch hier keine Beeinflussung mehr auszumachen. Das verwendete Kopplungsverfahren führt also bei kleiner Anzahl von Partikel pro Elementseite lokal durchaus zu einer Modifikation der Druckverläufe, die jedoch mit der Entfernung von der Grenzfläche rasch abklingt. Ergebnisse unter Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens sind hier nicht dargestellt, sie unterscheiden sich jedoch nicht wesentlich von den mit der Standard-SPH-Methode erzeugten.

### 9.2.5 Fehler der Energiebilanz

Abschließend sollen noch die Fehler in der Energiebilanz bei den verschiedenen Berechnungsvarianten dargestellt werden, da sie ein Maß für die Güte der numerischen Berechnung insgesamt angeben. Deren Entwicklung über die berechnete Zeitspanne zeigt Abbildung 9.26. Die Berechnungen mit reiner FE-Diskretisierung weisen einen vergleichsweise hohen Energiefehler auf, da die Energie der gelöschten Elemente nicht gespeichert wurde. Die Fehler sind hier also vor allem auf die Erosion zurückzuführen, nehmen mit höherer Auflösung jedoch ab. Der Fehler der Berechnung mit vollständiger SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes liegt bei etwa 10 % und nimmt mit höherer Auflösung ebenfalls ab.

Wird in der Kopplung nur die geringste Auflösung verwendet (FE-SPH 1:1), liegt der Energiefehler bei Berechnungsende bei 20%. Bei der höchsten Auflösung im SPH-Bereich reduziert sich dieser Fehler auf 8%. Die Normalisierung bringt eine Verringerung des Energiefehlers in der Größenordnung einer Verfeinerungsstufe. Die adaptive Kopplung führt zu einem im Vergleich mit der reinen SPH-Diskretisierung etwas erhöhten Energiefehler (14% bei der betrachteten Auflösung). Der Fehler ist bei Verwendung der Normalisierung ebenfalls etwas geringer (11%).

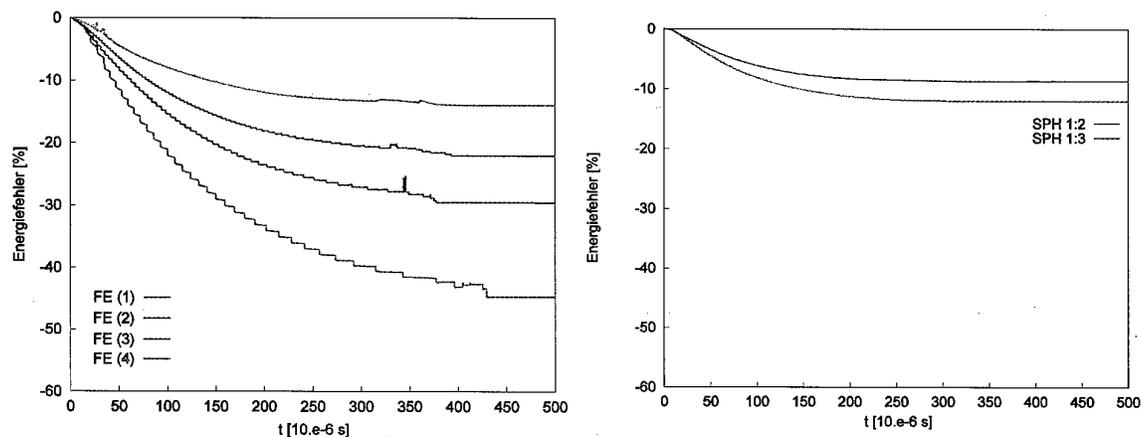


Abbildung 9.26: Vergleich der Entwicklung des Energiefehlers bei reiner FE- (links) und reiner SPH-Diskretisierung (rechts) des Aluminiumblockes und verschiedenen Auflösungen.

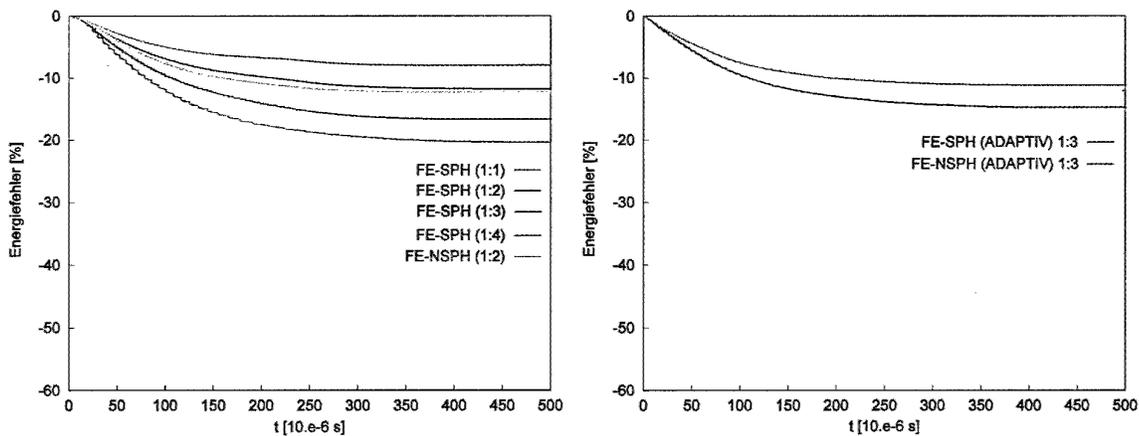


Abbildung 9.27: Vergleich der Entwicklung des Energiefehlers bei Anwendung der Kopplung (links: nicht adaptiv, rechts: adaptiv) und verschiedenen Auflösungen im SPH- bzw. NSPH-Bereich

### 9.3 Auswirkungen auf die Berechnungszeit

Ziel der Kopplung des SPH-Verfahrens mit finiten Elementen ist letztendlich die Verringerung der Rechenzeit unter Beibehaltung der Vorteile, die die SPH-Methode bei großen Deformationen bietet. Abbildung 9.28 zeigt, wie sich die Berechnungszeit für einen Zeitschritt vergrößert, wenn der Anteil der Partikel an der Diskretisierung steigt. Die Rechenzeiten wurden für einen PC mit 500 MHz Pentium-Prozessor, 128 MB und Betriebssystem Linux ermittelt. Die Angabe der Rechenzeiten erfolgt einmal über den Anteil der mit Partikeln diskretisierten Fläche an der Gesamtfläche des Aluminiumblockes, einmal über die absolute Anzahl der Partikel, bezieht sich jedoch in beiden Diagrammen auf dieselben Rechenläufe. Dabei wurden einmal 2, einmal 4 Partikel pro Elementseite bei der Ersetzung der Elemente verwendet. Die Diagramme verdeutlichen, daß die Berechnungsdauer mit dem Anteil der Partikel praktisch linear ansteigt, nur wenn das Ziel vollständig mit SPH-Partikeln diskretisiert wird, flacht die Kurve ab, weil dann der zusätzliche Aufwand für die Kopplungsberechnung entfällt.

Die oben dargestellten Berechnungen erforderten je nach Auflösung zwischen 2000 und 10000 Zeitschritten. Der Zeitgewinn bei Verwendung der höchsten Auflösung und einer Reduktion des Partikelanteils von 100 % auf 20 % beträgt beispielsweise etwa 20 s/Zeitschritt, bei 10000 Zeitschritten wird somit die Berechnungszeit von 69 auf 19 Stunden reduziert.

Die adaptive Kopplung bringt einen zusätzlichen Zeitgewinn, da die Partikel erst im Laufe der Berechnung erzeugt werden. Abbildung 9.29 zeigt die Entwicklung der Berechnungsdauer pro Zeitschritt bei der adaptiven Berechnung (Variante FE-NSPH 1:3). Bis zum Berechnungsende nach 10000 Zeitschritten wurden 25 % der Fläche des Aluminiumblockes durch Elemente ersetzt. Die Berechnung dauerte insgesamt 9.75 Stunden, dies entspricht 67 % der Berechnungs-

zeit bei sofortiger (nicht adaptiver) Umwandlung eines Viertels aller Elemente in Partikel (insg. ca. 15 Stunden). Gegenüber der reinen SPH-Diskretisierung des Aluminiumblockes ergibt sich ein Zeitgewinn von ca. 26 Stunden bzw. 75 %.

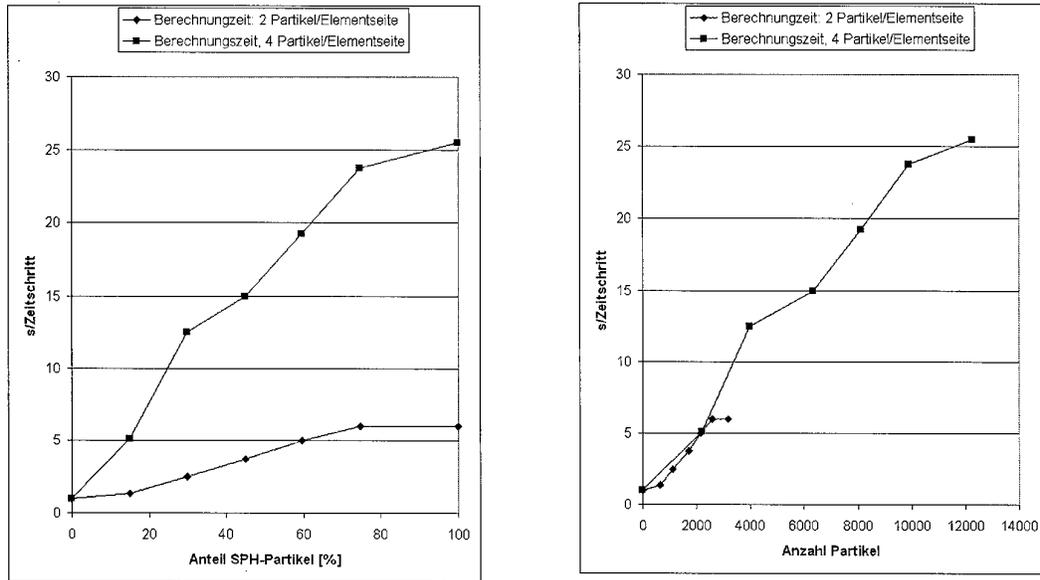


Abbildung 9.28: Berechnungsdauer für einen Zeitschritt bei Variation des mit Partikeln diskretisierten Anteils des Aluminiumblockes

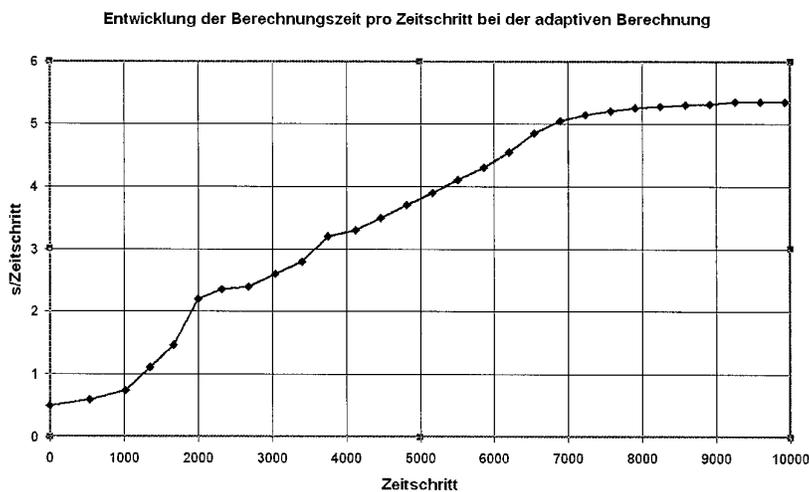


Abbildung 9.29: Entwicklung der Berechnungsdauer pro Zeitschritt bei Einsatz der adaptiven Kopplung und Verwendung von 3 Partikeln pro Elementseite.

#### 9.4 Ausblick: Anwendung der adaptiven Kopplung in der dreidimensionalen Berechnung des Penetrationsvorganges

Im Rahmen dieser Arbeit wurde auch eine dreidimensionale Simulation des Versuches von Weber, Hohler & Stilp (1996) durchgeführt. Die Vorstellung der Ergebnisse in diesem Abschnitt hat jedoch den Charakter eines Ausblickes, denn, wie bereits eingangs des Kapitels erwähnt, erlaubt das Fehlen eines dreidimensionalen Master-Slave-Algorithmus nur eine prinzipielle Darstellung der Funktionalität des entwickelten adaptiven Kopplungsverfahrens.

Die Simulation erfolgte unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften des Problems. Durch die Berücksichtigung zweier Symmetrieebenen ( $y=0$  und  $z=0$ ) muß nur ein Viertel der Körper modelliert werden. Die Spitze des Projektils wurde mit Partikeln diskretisiert, der zylindrische Projektilkörper mit Elementen. Für die Kopplung wurde, wie in der zweidimensionalen Simulation, das Verfahren der hybriden Approximation mit Berechnung der Kräfte auf Elementknoten aus den Beschleunigungsanteilen der SPH-Summengleichung (HA-F) verwendet. Pro Elementseite wurden 4 Partikel erzeugt, also 36 Partikel für jedes umzuwandelnde Hexaederelement. Die Diskretisierung der Projektilspitze mit Partikeln erlaubt die Verwendung des Kopplungsverfahrens für den Kontakt zwischen Projektil und Ziel. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ist, daß hierdurch der Kontakt so berechnet wird, als bildeten Projektil und Ziel einen zusammenhängenden Körper. Dadurch treten im Kontaktbereich sehr große plastische Dehnungen auf, der Eindringwiderstand wird erheblich vergrößert, und die Penetrationstiefe ist zu gering.

Der Aluminiumblock wurde zu Beginn der Berechnung mit etwa 14000 Hexaeder-Elementen diskretisiert, die bei Erreichen einer effektiven plastischen Dehnung  $\varepsilon_{\text{eff., pl}}$  von 0.18 in Partikel umgewandelt wurden. In Abbildung 9.30 ist die Diskretisierung nach  $60 \mu\text{s}$  zu dargestellt. Die Darstellung der Spannungen in einem Schnitt senkrecht zur Projektilachse in Abbildung 9.31 läßt die entstehenden Zugspannungen in Umfangsrichtung erkennen, die in der zweidimensionalen Betrachtung nicht simuliert werden können.

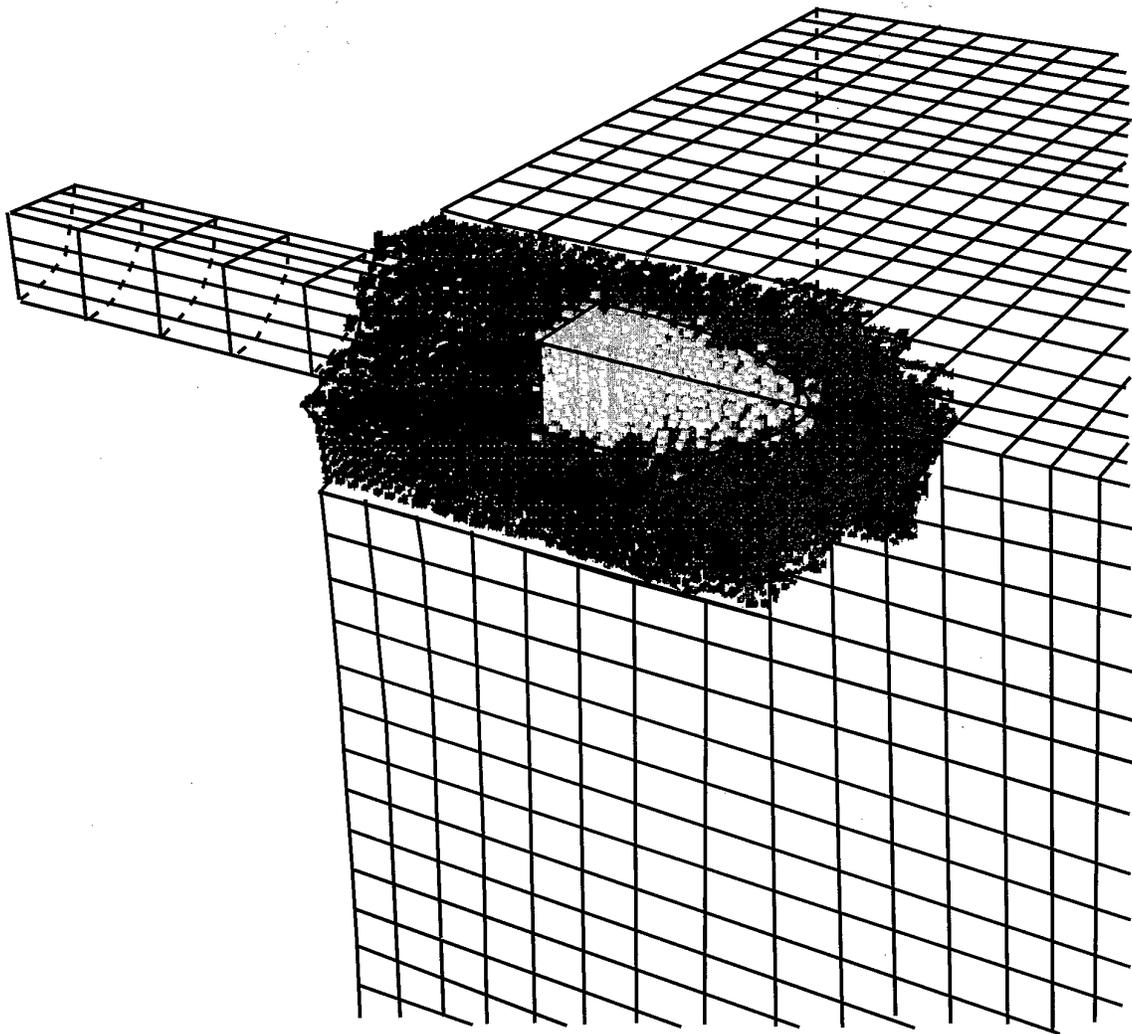


Abbildung 9.30: Diskretisierung in der dreidimensionalen Berechnung mit adaptiver Umwandlung von Hexaederelementen des Aluminiumblockes in Partikel. Zustand nach  $60 \mu\text{s}$ . Die Partikel sind als kleine Quader dargestellt, die Farbe gibt einen Geschwindigkeitsbereich an (hellgrün: ca.  $250\text{-}350 \text{ cm}/\mu\text{s}$ ).

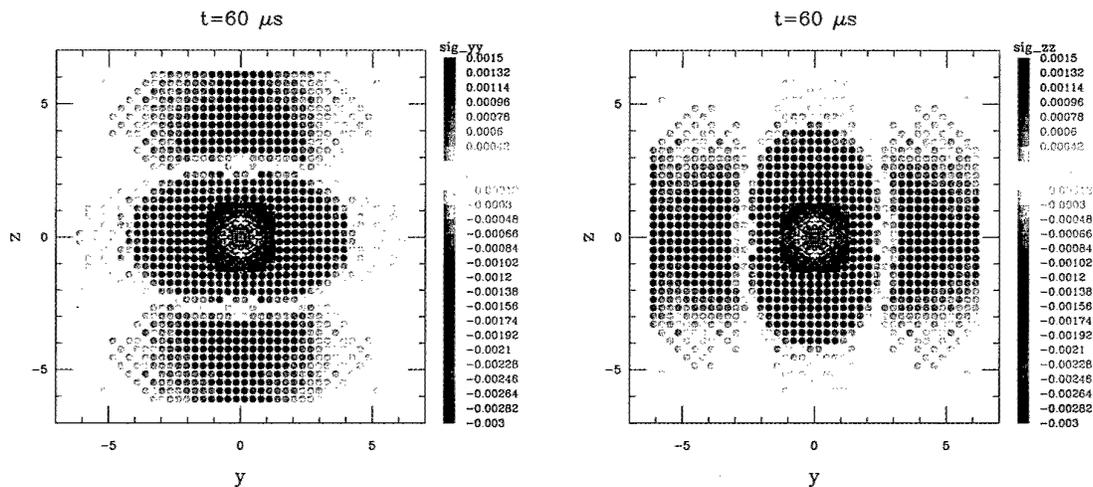


Abbildung 9.31: Ergebnis der dreidimensionalen Berechnung mit adaptiver Umwandlung von Hexaederelementen des Aluminiumblockes in Partikel. Dargestellt sind die Spannungen in  $y$ -Richtung (links) und  $z$ -Richtung (rechts) in einem Schnitt 3 cm von der Oberfläche des Aluminiumblockes. Die Größeren Punkte sind Elementmittelpunkte, die kleinen Punkte im Zentrum sind Partikel des Projektils und Partikel aus umgewandelten Elementen des Aluminiumblockes.

## 9.5 Schlußfolgerungen

Die in diesem Kapitel dargestellten Berechnungsergebnisse verdeutlichen, daß die in dieser Arbeit entwickelte adaptive Kopplung eine Verbesserung der Simulationsverfahren für Impaktvorgänge darstellt. Sie führt bei richtiger Wahl der Auflösung im SPH-Bereich zum selben Ergebnis wie eine reine SPH-Diskretisierung des Ziels, die Rechenzeit wird gleichzeitig um 75 % reduziert. Gleichzeitig tritt der bei Anwendung der SPH-Methode zu beobachtende „numerische Bruch“ an der potentiellen Austrittsstelle bei Anwendung der adaptiven Kopplung nicht auf (Abbildung 9.32).

Die reine FE-Diskretisierung führt aufgrund des numerischen Hilfsmittels der „Erosion“, des Löschens verzerrter Elemente, nicht zum selben Berechnungsergebnis wie die Berechnungen unter Verwendung der SPH-Methode, das Projektil bleibt nicht stecken, sondern es erfolgt eine vollständige Penetration. Die Kopplung mit der SPH-Methode verhindert daneben das Auftreten durch die Erosion bedingter Druckstöße (Abbildungen 9.22 und 9.23).

Eine SPH-Diskretisierung des Projektils hat sich als untauglich erwiesen, solange keine besondere Kontaktberechnung in der SPH-Methode eingeführt wird. Der hier verwendete Master-Slave-Algorithmus für den Kontakt zwischen mit Elementen diskretisiertem Projektil und mit Partikeln modelliertem Ziel ist deutlich überlegen.

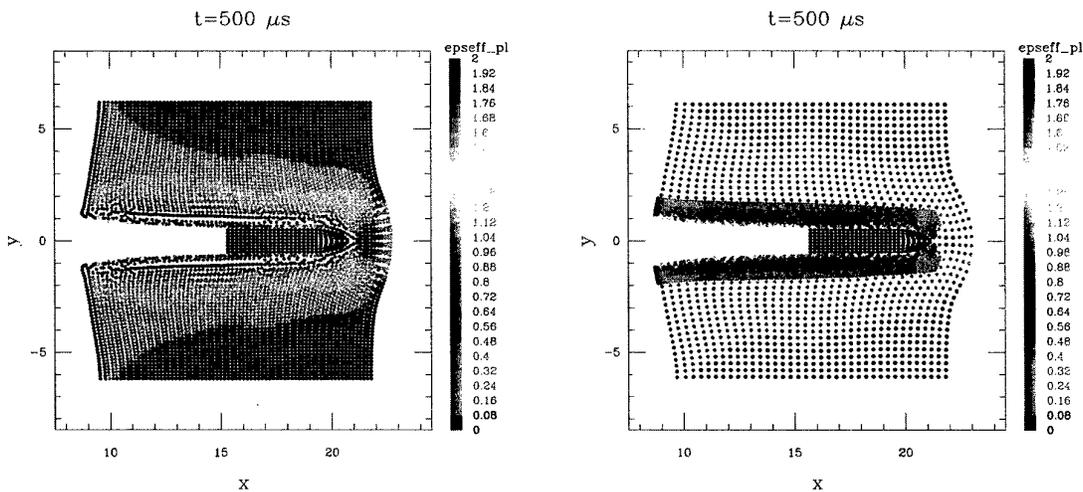


Abbildung 9.32: Übereinstimmung der Ergebnisse bei reiner SPH-Diskretisierung des Ziels (links) und Anwendung der adaptiven Kopplung von Elementen und Partikeln (rechts).

Der Vergleich der Energiefehler (Abbildungen 9.26 und 9.27) zeigt, daß der zusätzliche Energiefehler, der durch den Einsatz der adaptiven Kopplung gegenüber der reinen SPH-Rechnung auftritt, nur gering ist. Im Vergleich zur FE-Rechnung mit Erosion ist der Fehler in der Energiebilanz dagegen deutlich verringert.

Ziel dieses Abschnittes war die Demonstration der Funktionalität und Praktikabilität sowie der Grenzen des entwickelten adaptiven Berechnungsverfahrens für zweidimensional ebene und dreidimensionale Probleme. Es wurden bewußt keinerlei Parameteranpassungen zur Erzielung eines besser mit dem Versuchsergebnis übereinstimmenden Resultates durchgeführt, allein der Einfluß der Diskretisierung wurde betrachtet. Zur Verbesserung des Resultates wäre, neben der Erweiterung des Master-Slave-Algorithmus auf dreidimensionale Probleme, auch die Einführung eines geeigneten Versagensmodells erforderlich.



## 10. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

### Ausgangssituation und Zielsetzung

Zur Berechnung von Impaktvorgängen mit sehr hohen Belastungsgeschwindigkeiten, bei denen die Ausbreitung von Druck- oder Schockwellen eine große Rolle spielt, werden besondere Berechnungsprogramme, sogenannte Hydrocodes, eingesetzt. Sie unterscheiden sich durch eine explizite Zeitintegration, eine besondere Formulierung für Materialmodelle und die Verwendung spezieller Verfahren zur numerischen Behandlung von Schockwellen von den im Ingenieurwesen üblichen Simulationsprogrammen. In der Vergangenheit wurden Hydrocodes vor allem auf Basis netzbasierter Diskretisierungsverfahren, insbesondere der Finite-Elemente-Methode und der Finite-Differenzen-Methode oder Finite-Volumen-Methode entwickelt. Etwa seit Beginn der neunziger Jahre werden auch netzfreie Diskretisierungsverfahren, insbesondere die in dieser Arbeit behandelte Methode der Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), für Impaktberechnungen eingesetzt. Sie bietet prinzipbedingt Vorteile in allen Fällen, in denen Risse oder große Deformationen auftreten. Topologische Verbindungen zwischen Berechnungspunkten, wie sie durch ein Berechnungsnetz repräsentiert werden, müssen in solchen Fällen aktualisiert oder gelöscht werden. In einem netzfreien Verfahren werden sie von Anfang an überhaupt nicht benötigt.

Die SPH-Methode hat gegenüber Netzmethoden jedoch den Nachteil des größeren Berechnungsaufwandes, der daraus resultiert, daß in jedem Zeitschritt eine Summation über Werte einer Anzahl benachbarter Partikel erfolgen muß. Welche Partikel einander benachbart sind, ist dabei immer wieder neu zu bestimmen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Berechnungsverfahrens auf der Basis der adaptiven Kopplung der SPH-Methode mit einer Netzmethode, im folgenden als hybrides Verfahren bezeichnet. Ein solches Verfahren ermöglicht den Einsatz der SPH-Methode in Problemstellungen, in denen sie wegen des hohen Rechenaufwandes sonst nicht einsetzbar ist, indem nur die Bereiche, in denen große Deformationen auftreten, mit Partikeln diskretisiert werden. Die Rechenzeit wird verringert unter Beibehaltung der Vorteile, die die SPH-Methode bei großen Deformationen bietet. Dieser Effizienzgewinn wird maximiert durch eine *adaptive* Kopplung. Die Diskretisierung kann zunächst vollständig mit der Netzmethode geschehen, erst wenn tatsächlich große Deformationen eintreten, erfolgt eine automatische Umwandlung der Elemente in Partikel.

Verschiedene Algorithmen zur Kopplung der SPH-Methode mit Netzmethoden sind bereits bekannt. Sie beinhalten jedoch Näherungen, die ihren Einsatz in einem adaptiven Verfahren

fragwürdig erscheinen lassen oder ganz unmöglich machen. Daher wird in der vorliegenden Arbeit ein neuer Kopplungsalgorithmus entwickelt.

Als Ausgangspunkt für die Entwicklung eines hybriden Verfahrens stand das SPH-Programm SOPHIA (Hiermaier, 1996) zur Verfügung.

## **Ergebnisse**

In Kapitel zwei der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Grundlagen der Mechanik, die in den numerischen Simulationsverfahren für Impaktvorgänge benötigt werden, zusammengestellt. Kapitel drei gibt eine Übersicht über die Prinzipien der netzbasierten und netzfreien Verfahren, die in Hydrocodes für die räumliche Diskretisierung Verwendung finden.

Die Verfahren der zeitlichen Integration sind Thema des vierten Kapitels. Im entwickelten hybriden Verfahren wird ein modifiziertes Leap-Frog-Schema verwendet, das eine Genauigkeit zweiter Ordnung bietet. Hierfür war ein geeigneter Berechnungsablauf zu entwickeln, der für das netzbasierte Verfahren ebenso wie für die SPH-Methode anwendbar ist. Er wird in Form eines Diagrammes präsentiert, in dem der Zusammenhang zwischen den wesentlichen Berechnungsvariablen und die Reihenfolge ihrer Bestimmung in einem sequentiellen Programm angegeben wird (Abbildung 4.1).

In Kapitel 5 wird die verwendete Netzmethode (Finite-Elemente-Methode) erläutert. Implementiert wurden ein zweidimensionales, quadrilaterales Element mit einem Integrationspunkt, sowie ein dreidimensionales Hexaederelement. Für zweidimensionale Elemente wurde darüber hinaus ein Kontaktalgorithmus implementiert.

Die SPH-Methode wird in Kapitel 6 behandelt. Schwerpunkt sind dabei die mittlerweile bekannten Defizite des Verfahrens und Möglichkeiten zu deren Verbesserung. Es wird eine Übersicht der aus der Literatur bekannten Ansätze gegeben, das im erstellten Programm verwendete Verfahren der Normalisierung wird erläutert und sein Effekt in der Berechnung einer eindimensionalen Wellenausbreitung demonstriert. Dabei zeigt sich, daß das normalisierte SPH-Verfahren (NSPH) unabhängig von der Anzahl der Nachbarn, die bei der Approximation berücksichtigt werden, die korrekte Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle liefert, dies ist für die Standard-SPH-Methode nicht der Fall (Abbildung 6.4).

Kapitel 7 stellt das neu entwickelte Kopplungsverfahren vor, das, im Gegensatz zu bereits bestehenden Verfahren, den Einsatz in einer adaptiven Kopplung von SPH und Finiten Elementen erlaubt. Hierzu werden zunächst die bekannten Ansätze, das Master-Slave-Verfahren und die Kopplung mit Übergangselementen, vorgestellt und diskutiert. Beide wurden zu Vergleichszwecken auch im erstellten Programm implementiert. Das im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte Kopplungsverfahren basiert auf einer Erweiterung des Approximationsansatzes der SPH-Methode, die eine Berücksichtigung der Zustandsgrößen in benachbarten Elementen bei der Berechnung von Gradienten erlaubt. Hierdurch können erstmals auch Deformationsraten

für Partikel im Übergangsbereich approximiert werden. Eine entsprechende Formulierung für die Kopplung mit dem normalisierten SPH-Verfahren wird ebenfalls präsentiert. Die Güte dieser als „hybride Approximation“ (HA) bezeichneten Kopplung wird zunächst anhand der Näherung einer vorgegebenen analytischen Funktion untersucht (Abbildungen 7.13-7.17). Zwei verschiedene Varianten der HA, die sich durch die Art und Weise der Berechnung der Reaktionskräfte von Partikel auf die Elemente unterscheiden, werden in Abschnitt 7.3 mit bestehenden Verfahren zur Kopplung anhand der Simulation der Ausbreitung einer elastischen Welle verglichen. Dieser Vergleich erfolgt anhand berechneter Geschwindigkeitsprofile, der Druckentwicklung an Referenzpunkten auf den beiden Seiten der Grenzfläche zwischen Elementen und Partikeln und der Impuls- und Energieübertragung über die Grenzfläche. Es zeigt sich, daß die HA gegenüber den bestehenden Kopplungsalgorithmen eine Verbesserung darstellt. Der Fehler in der Impulsübertragung, also der Anteil des Impulses der Welle, der an der Grenzfläche reflektiert wird, wird bei der größten Auflösung halbiert (Abbildung 7.39). Zusätzlich bietet das neue Verfahren die Möglichkeit der Wahl einer beliebig hohen Auflösung im SPH-Bereich, hierdurch läßt sich der Fehler der Impulsübertragung weiter vermindern (im Beispiel von 3 % auf unter 0.5 %). Die Güte der Energieübertragung des neuen Kopplungsverfahrens ist bei der Verwendung von mindestens zwei Partikeln pro Elementseite ebenso gut wie bei einer reinen Anwendung der SPH-Methode in derselben Auflösung. Die Konvergenz der HA in Geschwindigkeits- und Druckentwicklung konnte durch die Wahl verschiedener Auflösungen im SPH-Bereich ebenfalls gezeigt werden. Mindestens zwei, besser drei bis vier Partikel pro Elementseite sollten gewählt werden, um mit der HA gute Ergebnisse zu erzielen.

Kapitel 8 erläutert das neue objektorientierte Datenmodell, mit dessen Hilfe das hybride Verfahren in einem in der Sprache C++ geschriebenen Programm implementiert wurde (Abbildung 8.3). In diesem Datenmodell sind Partikel und Finite Elemente von derselben Basisklasse abgeleitete Klassen, sie weisen dadurch identische Schnittstellen zum globalen Algorithmus auf. Dies ermöglicht eine einfache Umwandlung von Elementen in Partikel im Sinne des adaptiven Verfahrens. Partikel und Finite Elemente sind darüber hinaus aus denselben Grundelementen zusammengesetzt, sogenannten *MassPoints*, die Masse und die Lagrangeschen Koordinaten repräsentieren, und *StressPoints*, die das Materialverhalten beschreiben. Diese Vorgehensweise gewährleistet, daß alle von der räumlichen Diskretisierung unabhängigen Programmteile, wie die zeitliche Integration der Geschwindigkeiten und Koordinaten oder die Materialmodelle, im Programm nur einmal implementiert werden müssen und sofort für alle Elemente und Partikel nutzbar sind. Insgesamt konnte damit ein objektorientiertes Datenmodell geschaffen werden, das eine neue Flexibilität in der Wahl der Diskretisierungsmethode bietet und offen für die Erweiterung mit anderen Diskretisierungsverfahren ist.

Abschließend wird in Kapitel 9 eine beispielhafte Impaktberechnung präsentiert, in der das erstellte Programm mit dem neuen, adaptiven Kopplungsalgorithmus in einer zweidimensional planarsymmetrischen Berechnung eingesetzt wird. Im gewählten Beispiel der Penetration eines steifen Penetrators in ein relativ weiches Ziel erweist sich der implementierte Master-Slave-

Algorithmus als gut geeignet für die Berechnung des Kontaktes zweier verschiedener Körper, von denen einer mit Partikeln, der andere mit Elementen diskretisiert wurde. Die HA wurde in der Diskretisierung des Ziels eingesetzt. Es wird gezeigt, daß sich durch die Kombination mit der SPH-Methode gegenüber der reinen FE-Diskretisierung ein verbessertes Ergebnis erzielen läßt. Der Fehler in der Energiebilanz wird verringert (Abbildungen 9.26 und 9.27), und die durch das Löschen verzerrter Elemente entstehenden Druckstöße treten nicht auf (Abbildungen 9.22 und 9.23). Gegenüber der Anwendung der reinen SPH-Methode reduziert sich die Berechnungszeit bei Einsatz der adaptiven Kopplung um 75 % (Abbildungen 9.28 und 9.29). Außerdem wird das Auftreten numerischer Instabilitäten, die das Ergebnis der SPH-Rechnung verfälschen können, vermieden. Schließlich wird die Anwendbarkeit des adaptiven Verfahrens auch in dreidimensionalen Simulationen demonstriert.

### **Ausblick**

Das neue Kopplungsverfahren hat sich als geeignet für die adaptive Kopplung der SPH-Methode mit finiten Elementen zur Diskretisierung eines zusammenhängenden Körpers erwiesen. Für die Kontaktberechnung zweier verschiedener Körper, von denen einer mit Partikeln, der andere mit Elementen diskretisiert wurde, ist im Programm eine zweidimensionale Version des Master-Slave-Algorithmus implementiert. Um Impaktvorgänge auch im dreidimensionalen Fall realistisch berechnen zu können, sollte dieser auf den dreidimensionalen Fall erweitert werden, derartige Algorithmen sind bekannt.

Auch für den Kontakt zweier mit Partikeln diskretisierter Körper ist eine verbesserte Kontaktberechnung erforderlich. Ansätze hierzu gibt es bereits, z. B. bei Randles & Libersky (1996) oder Dilts (1999).

Die numerische Stabilität der SPH-Methode wird durch die in dieser Arbeit eingesetzte Normalisierung bereits verbessert. Sie löst jedoch nicht alle Probleme, insbesondere dann, wenn sich unregelmäßige Partikelverteilungen einstellen, kann die dann schlechtere Konditionierung der zu invertierenden Matrix zu Problemen führen. Eine Weiterentwicklung des SPH-Approximationsverfahrens ist daher erforderlich.

Die SPH-Methode erscheint insbesondere mit der nun verfügbaren Kopplung mit finiten Elementen ideal geeignet, um das Verhalten spröder Materialien, insbesondere die Öffnung und Entstehung von Rissen, unter dynamischen Beanspruchungen simulieren zu können. Um sie hierfür einsetzen zu können, ist die Einbindung von besonderen Verfahren zur Modellierung der Entstehung und Ausbreitung von Rissen unbedingt erforderlich, wie sie von Riedel (1997) vorgeschlagen wurden. Denkbar scheint hierbei auch, vom eigentlich ein Kontinuum repräsentierenden Partikel zu einer diskreten Beschreibung überzugehen. Das implementierte Datenmodell bietet die hierfür benötigte Flexibilität.

## 11. LITERATURVERZEICHNIS

- Atluri, S. N., Kim, H.-G. & Cho, J. Y. (1999): *A Critical Assessment of the Truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) Methods*. In: *Computational Mechanics* 24 (5), S. 348-372
- Attaway, S. W., Heinstein, M.W. & Swegle, J.W. (1994): *Coupling of Smoothed Particle Hydrodynamics with the Finite Element Method*. In: *Nuclear Engineering and Design* 150 (Post-SMIRT Impact IV Seminar Berlin)
- Babuška, I. & Melenk, J. M. (1997): *The Partition of Unity Method*. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, S. 727-758
- Balsara, D.S. (1995): *Von Neumann Stability Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics - Suggestions for Optimal Algorithms*. In: *Journal of Computational Physics*, 121, S. 357-372
- Bardenhagen, S., Brackbill, J. & Sulsky, D. (1999): *The Material-Point Method for Granular Materials*. Vortrag, 5<sup>th</sup> US National Congress on Computational Mechanics, University of Colorado, Boulder, Colorado, 4.-6. August
- Bathe, K.-J. (1986): *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin
- Baty, R. S. & Wolfe, W.P. (1997): *Least-Squares-Solutions of a General Numerical Method for Arbitrary Irregular Grids*. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, S. 1701-1717
- Beissel, S. & Belytschko, T. (1996): *Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, S. 49-74
- Benson, D.J. (1992): *Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 99, S. 235-394
- Belytschko, T. & Liu, W.K. (1983): *On Mesh Stabilization Techniques for Underintegrated Elements*. In: *Computational Aspects in Penetration Mechanics*. In: *Lecture Notes in Engineering* 3, Springer-Verlag, Berlin
- Belytschko, T., Gu, L. & Lu, Y.Y. (1994): *Fracture and Crack Growth by Element Free Galerkin Methods*. In: *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering* 2, S. 519-534
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. & Gu, L. (1994): *Element Free Galerkin Methods*. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37, S. 229-256
- Belytschko, T., et al. (1996): *Meshless Methods: An Overview and Recent Developments*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, S. 3-48,
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Dolbow, J. & Gerlach, C. (1998) *On the Completeness of Meshfree Particle Methods*. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43, S. 785-819

- Bonet, J. & Kulasegaram, S. (2000): *Correction and Stabilization of Smooth Particle Hydrodynamics Methods with Applications in Metal Forming Simulations*. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 47, S. 785-819
- Bonet, J., Kulasegaram, S. & Lok, T.-S.L. (1999): *Corrected Smooth Particle Hydrodynamics Methods for Fluid and Solid Mechanics Computations*. In: Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics (ECCM 1999), Technische Universität München, 31.8.-3.9.
- Caruso, C. & Quarta, F. (1998): *Interpolation Methods Comparison*. In: Computers in Mathematics and Applications 35 (12), S. 109-126
- Century Dynamics (1999): *Autodyn Theory Manual*. Century Dynamics Ltd, Horsham, England.-Firmenschrift
- Chen, J.K., Beraun, J.E. & Jih, J.C. (1999): *An Improvement for Tensile Instability in Smoothed Particle Hydrodynamics*. In: Computational Mechanics 23, S. 279-287
- Chen, J.S., Yoon, S., Wu, C.T.(1999): *Stabilized Nodal Integration Methods for Galerkin-Based Meshfree Methods*. Vortrag, Fifth US National Congress on Computational Mechanics, University of Colorado, Boulder, Colorado, 4.8.-6.8.1999
- Chudoba, R. (1997): *Finite Element Kernels with Metaobject Protocol*. In: Modern Software Tools for Scientific Computing, Birkhäuser
- Cundall, P.A., Konietzky, H. & Potyondy, D.O. (1996): *PFC-ein neues Werkzeug für numerische Modellierungen*. In: Bautechnik 73, Heft 8, S. 492-498
- Dilts, G.A. (1999): *Moving-Least-Squares-Particle Hydrodynamics I: Consistency And Stability*. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 44, S. 1115-1155
- Dolbow, J. & Belytschko, T. (1999): *Numerical Integration of the Galerkin Weak form in meshless methods*. In: Computational Mechanics 23, S. 219-230
- Duarte, C.A., Oden, J.T. (1996): *An hp-Adaptive Method using clouds*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, S. 237-262
- Dukowicz, J.K., Cline, M.C. & Adessio, F.L. (1989): *A General Topology Godunov Method*. In: Journal of Computational Physics 82, S. 29-63
- Dyka, C.T. & Ingel, R.P. (1995): *An Approach for Tensile Instability in Smoothed Particle Hydrodynamics*. In: Computers and Structures 57, S. 573-580
- Flanagan, D.P. & Belytschko, T. (1981): *A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control*. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, S. 679-706
- Foerch, R. et al. (1997): *Polymorphic constitutive Equations in Finite Element Codes*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 141, S. 355-372
- Franke, R. (1982): *Scattered Data Interpolation: Tests of some Methods*. In: Mathematics of Computation 38 (157)
- Gebbeken, N. & Ruppert, M. (1999): *On the Safety and Reliability of High Dynamic Hydrocode Simulations*. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering 46, S. 839-851

- Gebbeken, N. & Ruppert, M. (1999): *A new Concrete Material Model for High Dynamic Hydrocode Simulations*. Zur Veröffentlichung eingereicht in Archive of Applied Mechanics, persönliche Mitteilung
- Gingold, R.A. & Monaghan, J.J. (1977): *Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Nonspherical Stars*. In: Monthly Notes of the Royal Astronomic Society 181, S. 375-389
- Gingold, R.A. & Monaghan, J.J. (1982): *Kernel Estimates as a Basis for General Particle Methods in Hydrodynamics*. In: Journal of Computational Physics 46, S. 429-453
- Glass, G. & Schuchert, B. (1996): *The STL <PRIMER>*. Prentice Hall PTR, New Jersey
- Großmann, Ch. & Roos, H.-G. (1994): *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart
- Guenther, C., Hicks, D.L. & Swegle, J.W. (1994): *Conservative Smoothing versus Artificial Viscosity*. Sandia Report SAND94-1853, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico
- Harlow, F. H. (1964): *The Particle in Cell Computing Method for Fluid Dynamics*. In: Methods in Computational Physics, Vol. 3, S. 319-343
- Hayhurst, C.J., Clegg, R. A. & Livingstone, I. H. (1996): *SPH Techniques and their Application in High Velocity and Hypervelocity Normal Impacts*. Vortrag, TTCP WTP 22<sup>nd</sup> Annual General Meeting, Hydrocode Workshop, Banff, Alberta, Canada, 10.-15.4. 1996
- Hayhurst, C. J., Clegg, R. A., Livingstone, I. H. & Francis, N. J. (1996): *The Application of SPH Techniques in AUTODYN-2D™ to Ballistic Impact Problems*, Vortrag, 16<sup>th</sup> International Symposium on Ballistics, San Francisco, California, 23.-28.9.1996
- Hayhurst, C.J. (1999): *Analyses on the Stability of SPH and Meshfree Methods*. Vortrag, Fifth US National Congress on Computational Mechanics, University of Colorado, Boulder, Colorado, 4.-6.8.1999
- Hegen, D. (1996): *Element-Free Galerkin Methods in Combination with Finite Element Approaches*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 135, S. 143-166
- Hicks, D.L. & Liebrock, L.M. (1999): *SPH Hydrocodes can be Stabilized With Shape-Shifting*. In: Computers and Mathematics with Applications 38, S. 1-16
- Hiermaier, S. (1996): *Numerische Simulation von Impaktvorgängen mit einer Netzfreien Lagrangemethode (Smooth Particle Hydrodynamics)*. Dissertation, Mitteilungen des Instituts für Mechanik und Statik/Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen d. Universität der Bundeswehr München, Heft 8
- Hiermaier, S. & Riedel, W. (1997): *Numerical Simulation of Failure in Brittle Materials using Smooth Particle Hydrodynamics*. In: Conference Proceedings International Workshop on New Models and Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media, 15.-19.9.1997, St. Catherine's College, Oxford, UK, S. 505-518
- Hiermaier, S., Könke, D. & Thoma, K.(1997): *Numerical Simulation for Protective Design*. In: Meskouris, K., Wittek, U., (Hrsg.): *Aspects in Modern Computational Structural Analysis* (Festschrift for Professor Krätzig), Balkema, Rotterdam
- Holmquist, T. J., Johnson, G. R. & Cook, W. H. (1993): *A Computational Model for*

- Concrete Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures*. Vortrag, 14th. Int. Sympos. on Ballistics, Québec, Canada
- Hughes, T.J.R. (1987): *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey
- Hughes, T.J.R. (1999): *Introduction to Stabilized Methods*. Short Course taught at the Fifth US National Congress on Computational Mechanics, University of Colorado, Boulder, Colorado, 4.8-6.8. 1999
- Ishikawa, N., Suzuki, S. & Katsuki, S. (1997): *Dynamic Behaviour of Reinforced Concrete Beams under Rapid Speed Loading*. In: Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Symposium on Interaction of the Effects of Munitions with Structures, Mc Lean, Virginia, 21.-25.4.1997
- Jensen, P.S. (1972): *Finite Difference Techniques for Variable Grids*. In: Computers and Structures 2, S. 17-29
- Johnson, G.R. (1983): *Status of the EPIC Codes, Material Characterization and New Computing Concepts at Honeywell*. In: *Computational Aspects in Penetration Mechanics*, Lecture Notes in Engineering 3, Springer-Verlag, Berlin
- Johnson, G.R. & Cook, W. H. (1983): *A Constitutive Model and Data for Metals subjected to Large Strains, High Strain Rates and Pressures*. Vortrag, 7th Int. Symposium on Ballistics, den Haag
- Johnson, G.R. Stryk, R.A. & Dodd, J.G.(1986): *Dynamic Lagrangian Computations for Solids with Variable Nodal Connectivity for Severe Distortions*. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering. 23, S. 509-522
- Johnson, G. R., Petersen E. H. et al. (1993): *Incorporation of an SPH Option into the EPIC Code for a wide range of High Velocity Impact Computations*. In: International Journal of Impact Engineering, 14, S. 385-394
- Johnson, G.R.(1994): *Linking of Lagrangian Particle Methods to Standard Finite Element Methods for High Velocity Impact Computations*. In: Nuclear Engineering and Design 150 ( Post-SMIRT Impact IV Seminar Berlin)
- Johnson, G.R. & Beissel, S.R. (1996): *Normalized Smoothing Functions for SPH Impact Computations*. In: International Journal for Numerical methods in Engineering, 39, S. 2725-2741
- Johnson, G.R., Stryk, R.A. & Beissel, S.R.(1996): *SPH for High Velocity Impact Computations*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, S. 347-374
- Karutz, H. (2000): *Adaptive Kopplung der Elementfreien Galerkin Methode mit der Methode der Finiten Elemente bei Rißfortschrittsproblemen*. Dissertation (Institut für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum); VDI-Verlag, Reihe 18, Band 255
- Könke, C., Chudoba, R. & Littwin, R. (1998): *HP-adaptive Simulationsaufgaben unter Anwendung eines flexiblen Datenmodells*. In: Finite Elemente in der Baupraxis, Ernst & Sohn, Berlin
- Lai, W. M., Rubin, D. & Krempl, E. (1993): *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, UK
- Lancaster, P. & Salkauskas, K. (1981): *Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods*. In: Mathematics of Computation, Vol. 37 (155)

- Libersky, L. D. & Petschek, A. G. (1991): *Smoothed Particle Hydrodynamics with strength of materials*. In: Trease, H. et al. (Hrsg.): *Advances in the Free Lagrange Method*, Lecture notes in Physics 395, Springer-Verlag, New York, S. 284-257
- Libersky, L.D. et al. (1993): *High Strain Lagrangian Hydrodynamics*. In: Journal of Computational Physics 109, S. 67-75
- Libersky, L.D. & Randles, P. W. (1999): *The Stress Point Technique as a Meshless Method*. Vortrag, Fifth US National Congress on Computational Mechanics, University of Colorado, Boulder, Colorado, 4.-6.8.1999
- Liszka, T.J. & Orkisz, J. (1977): *Finite Difference Method for Arbitrary Irregular Meshes in Nonlinear Problems of Applied Mechanics*. In: Proceedings of the IV SMIRT Conference, San Francisco
- Liszka, T.J., Duarte, C.A. & Tworzydło, W.W. (1996): *hp-Meshless Cloud Method*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, S. 263-288
- Liu, W.K. & Chen, Y. (1995): *Wavelet and Multiple Scale Reproducing Kernel Methods*. In: International Journal for Numerical Methods in Fluid Mechanics 21, S. 901-931
- Liu, W.K. et al. (1996): *Generalized Multiple Scale Reproducing Kernel Particle Methods*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, S. 91-158
- Lucy, L. B. (1977): *A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis*. In: Astronomy Journal 82, S. 1013ff.
- Malkus, D.S. & Hughes, T.J.R. (1978): *Mixed Finite Element Methods-Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 15 (1), S.63-81
- Melenk, J.M. & Babuška, I. (1996): *The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory And Applications*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, S. 289-314
- Meyers, M. A. (1994): *Dynamic Behaviour of Materials*. John Wiley & Sons, New York
- Monaghan, J. J. (1982,1): *Kernel Estimates as a Basis for General Particle Methods in Hydrodynamics*. In: Journal of Computational Physics 46, S. 429-453
- Monaghan, J. J. & Gingold, R.A. (1982,2): *Shock Simulation by the Particle Method SPH*. In: Journal of Computational Physics 52, S. 374-389
- Monaghan, J. J. (1989): *On the Problem of Penetration in Particle Methods*. In: Journal of Computational Physics 82, S. 1-15
- Nayroles, B., Touzot G. & Villon, P. (1992): *Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements*. In: Computational Mechanics 10, S. 307-318
- von Neumann, J. & Richtmyer, R. D. (1950): *A Method for the Numerical calculation of hydrodynamic shocks*. In: Journal of Applied Physics 21, S. 232 ff.
- Noh, W.F. (1964): *A time dependent, two-space-dimensional, coupled Eulerian-Lagrangian code*. In: Methods in Computational Physics, Vol. 3, *Fundamental Methods in Hydrodynamics*, Academic Press, New York
- Ortiz, M. (1996): *Computational Micromechanics*. In: Computational Mechanics 18, S. 321-338
- Perrone, N. & Kao, R. (1975): *A General Finite Difference Method for Arbitrary Meshes*. In:

- Computers and Structures 5, S. 45-58
- Plimpton, S. et al (1998): *Parallel Transient Dynamics Simulators: Algorithms for Contact Detection and Smoothed Particle Hydrodynamics*. In: Journal of Parallel and Distributed Computing 50, S. 104-122
- Randles, P.W. & Libersky, L.D. (1996): *Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, S. 375-408
- Rank, E., Katz, C. & Werner, H. (1983): *On the importance of the Discrete Maximum Principle in Transient Analyses Using Finite Element Methods*. In: International Journal of Numerical Methods in Engineering 19, S. 1771-1782
- Riedel, W. (1998): *Ein makroskopisches, modulares Betonmodell für Hydrocodes mit Verfestigung, Schädigung, Entfestigung, Drei-Invariantenabhängigkeit und Kappe*. EMI Bericht 7/98, Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik EMI, Freiburg
- Ritz, W. (1909): *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*. In: Journal der Reinen und Angewandten Mathematik 135, S. 1-61
- Rumbaugh, J. et al. (1993): *Objektorientiertes Modellieren und Entwerfen*. Hanser-Verlag München & Prentice-Hall International, London
- Sauer, M. & Hiermaier, S. (1999): *Berechnungsverfahren für hochdynamisch belastete Bauwerke mit hybrider (netzbasierter/netzfreier) Diskretisierung*. In: Meskouris, K., (Hrsg.): *Baustatik-Baupraxis 7*, Balkema, Rotterdam
- Scheffer, U. & Hiermaier, S. (1999): *Improving a SPH Code by Alternative Interpolation Schemes*. In: Meskouris, K. (Hrsg.): *Baustatik-Baupraxis 7*, Balkema, Rotterdam
- Schwarz, H.R. (1993): *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart
- Shepard, D. (1968): *A two-Dimensional Function for Irregularly Spaced Points*. In: Proceedings der „ACM National Conference“, USA
- Stepanov, A. & Lee, M. (1995): *The Standard Template Library*. Hewlett Packard, USA - Firmenschrift
- Strikwerda, J. C. (1989): *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, Californien
- Sulsky, D. & Schreyer, H. L. (1996): *Axisymmetric Form of the Material Point Method with Applications to Upsetting and Taylor Impact Problems*. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, S. 409-429
- Swegle, J.W., Attaway, S.W., Heinstein, M.W., Mello, F.J., Hicks, D.L. (1994): *An Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics*, Sandia Report SAND94-2513, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico
- Swegle, J.W., Hicks, D.L. et al. (1995): *Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis*. In: Journal of Computational Physics 116, S. 123-134
- Thoma, K. & Vinckier, D. (1994): *Numerical Simulations of a High Velocity Impact on Fiber Reinforced Materials*. In: Nuclear Engineering and Design 150 ( Post-SMIRT Impact IV Seminar Berlin)
- Toro, E. F. (1999): *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-

Verlag, Berlin

- Weber, K., Hohler, V. & Stilp, A.: *Penetration of 6061-T651 Aluminium Targets by Rigid Rods with Ogival Noses*. EMI Bericht 8/96, Fraunhofer Institut für Kurzzzeitdynamik EMI, Freiburg
- Wilkins, M.L. (1964): *Calculation of Elastic-Plastic Flow*. In: *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, S. 211-263
- Wilkins, M. L. (1980): *Use of Artificial Viscosity in Multidimensional Fluid Dynamic Calculations*. In: *Journal of Computational Physics* 36, S. 281-303
- Will, J. (1999): *Implizit versus explizit*. In: *Infoplaner 1/1999*, CADFEM GmbH, Grafing b. München - Firmenschrift
- Wright, J. P.: (1998): *Numerical Instability due to Varying Time Steps in Explicit Wave Propagation and Mechanics Calculations*. In: *Journal of Computational Physics* 140, S. 421-431
- Zel'dovich, Ya. B., Raizer & Yu. P. (1966): *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press, New York
- Zienkiewicz, O.C. Szmelter, J. & Peraire, J. (1990): *Compressible and Incompressible Flow; an Algorithm for All Seasons*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 78, S. 105-121
- Zukas, J. A. (Hrsg.) (1991): *High Velocity Impact Dynamics*. John Wiley & Sons, New York



## **12. ANHANG**

### **12.1 Anhang 1: Entwicklung des Gesamtimpulses und des Impulses in FE- und SPH/NSPH-Bereichen bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten für das Beispiel der eindimensionalen Ausbreitung einer elastischen Welle**

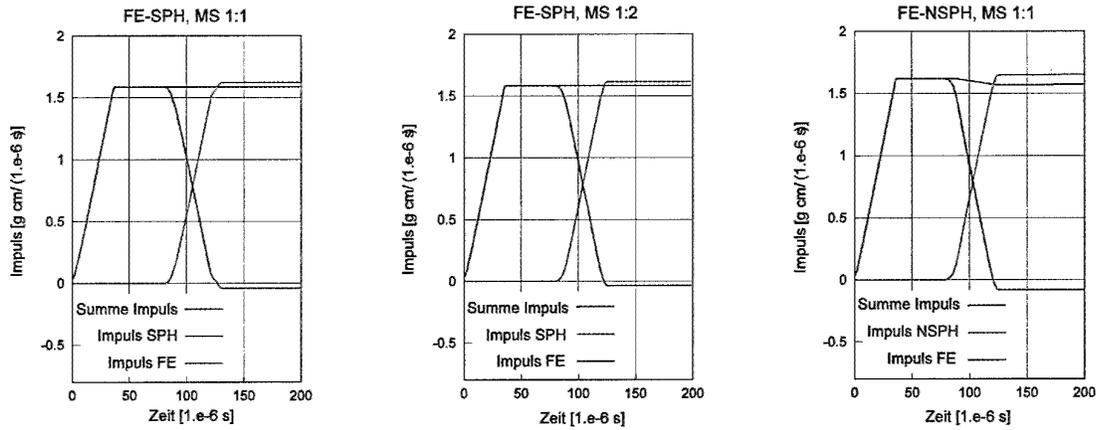


Abbildung 12.1: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Links: grobe Auflösung, Mitte: mittlere Auflösung, rechts: Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens

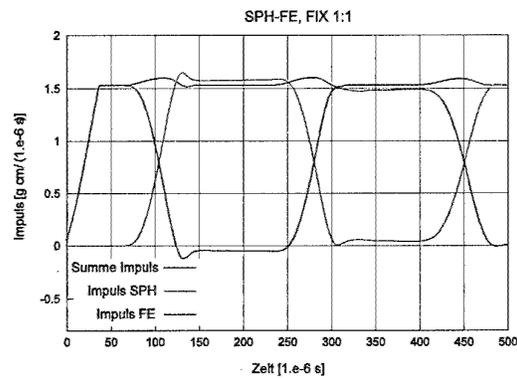


Abbildung 12.2: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit Übergangselementen.

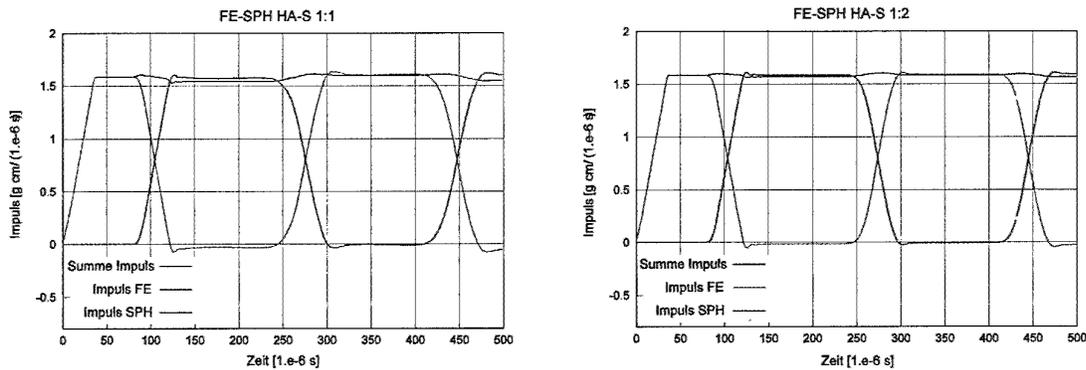


Abbildung 12.3: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-S Variante des neuen Kopplungsverfahrens bei grober und mittlerer Auflösung im SPH-Bereich.

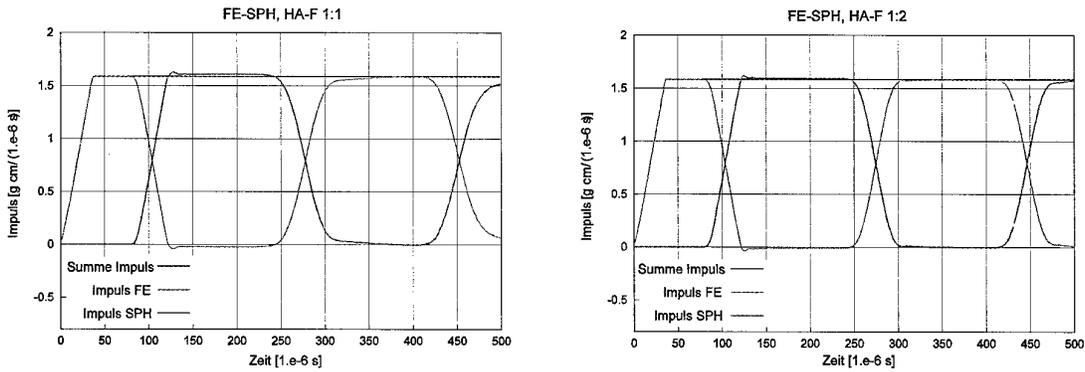


Abbildung 12.4: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-F Variante des neuen Kopplungsverfahrens bei grober und mittlerer Auflösung im SPH-Bereich.

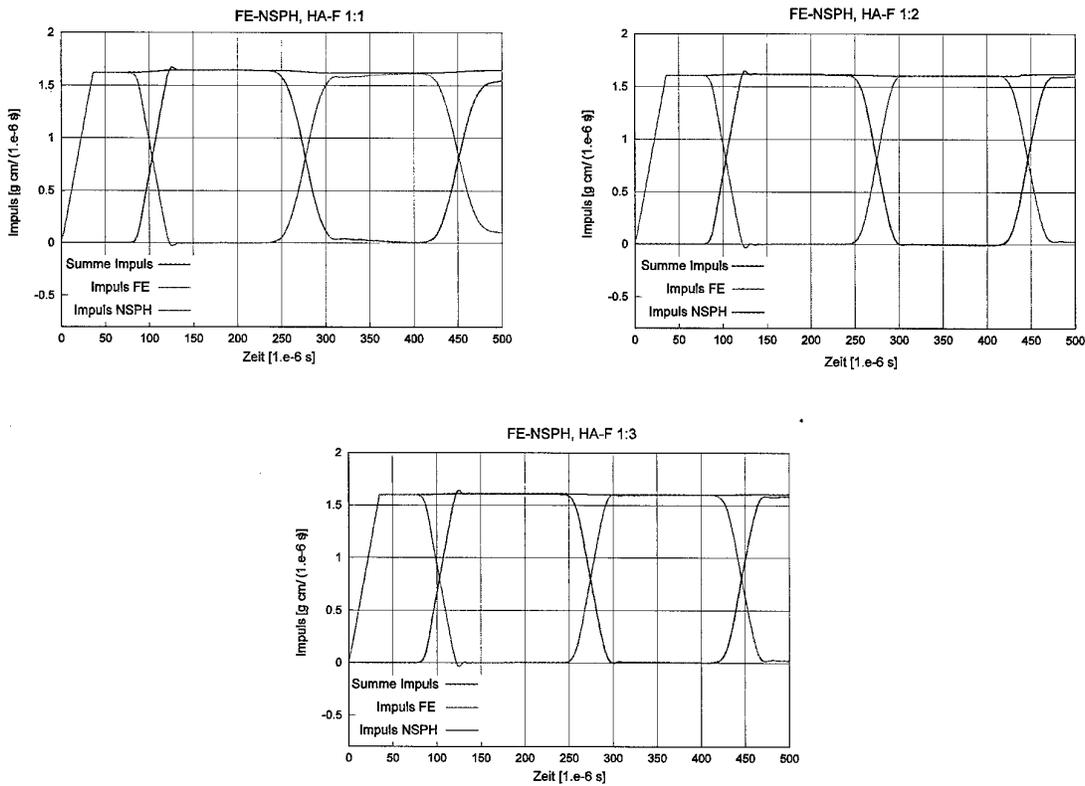


Abbildung 12.5: Entwicklung der Impulserhaltung bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-F Variante des neuen Kopplungsverfahrens bei grober, mittlerer und feiner Auflösung im SPH-Bereich.

**12.2 Anhang 2: Entwicklung der gesamten Energie sowie der inneren und kinetischen Energie in FE- und SPH/NSPH-Bereichen bei verschiedenen Kopplungsverfahren und Partikeldichten für das Beispiel der eindimensionalen Ausbreitung einer elastischen Welle**

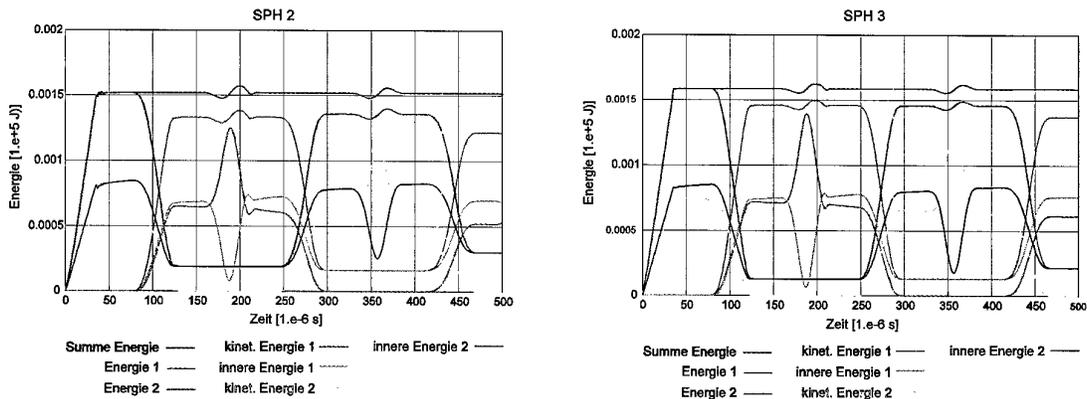


Abbildung 12.6: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei reiner SPH-Diskretisierung und mittlerer (links) bzw. feiner Auflösung (rechts).

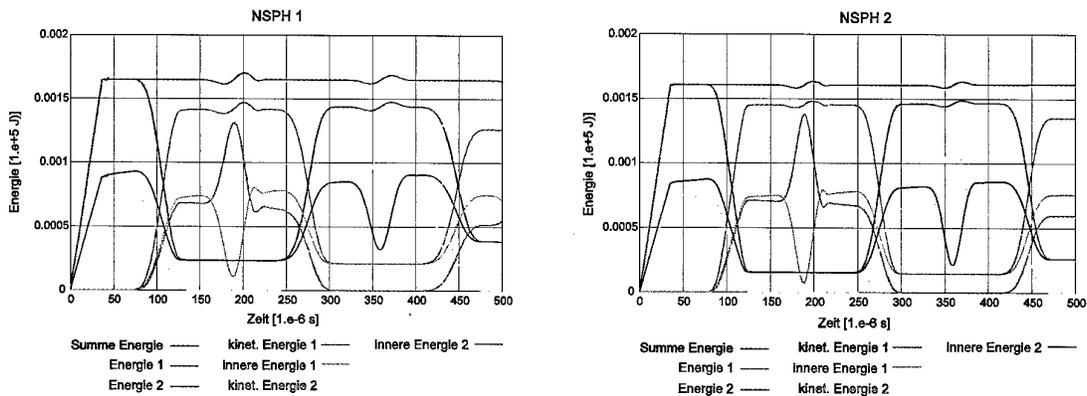


Abbildung 12.7: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei reiner SPH-Diskretisierung und grober (links) bzw. mittlerer Auflösung (rechts).

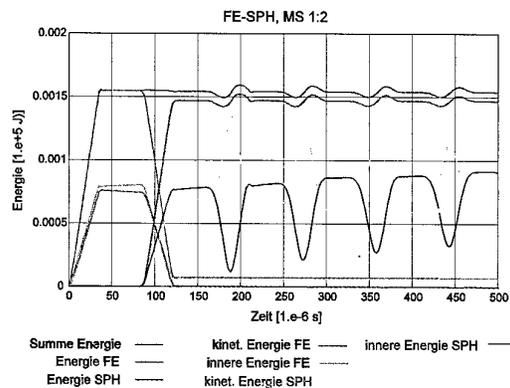


Abbildung 12.8: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei Kopplung mit dem Master-Slave-Verfahren. Da nur Druckkräfte übertragen werden können, findet nur eine einmalige Energieübertragung vom FE-Bereich in den SPH-Bereich statt.

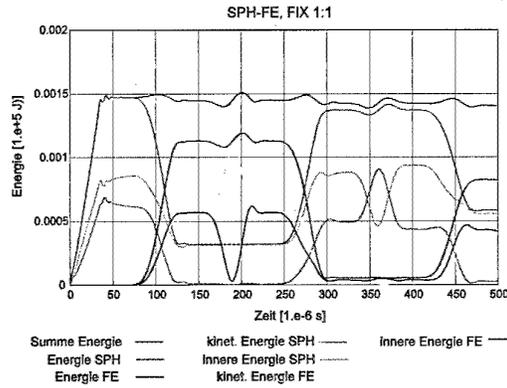


Abbildung 12.9: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-SPH-Kopplung mit Übergangselementen.

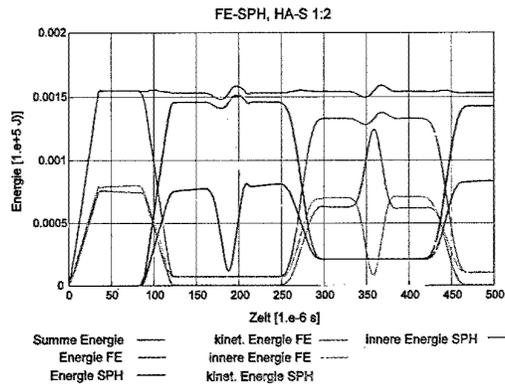
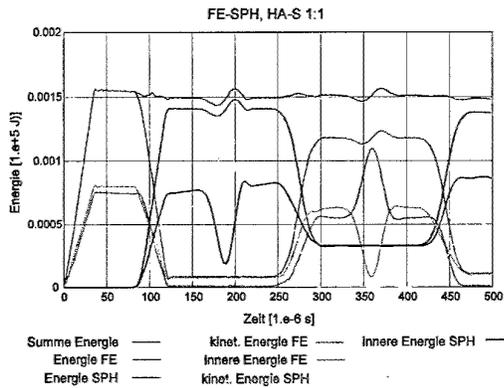


Abbildung 12.10: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-S-Variante des neuen Kopplungsverfahrens. Links: grobe Auflösung links, rechts: mittlere Auflösung.

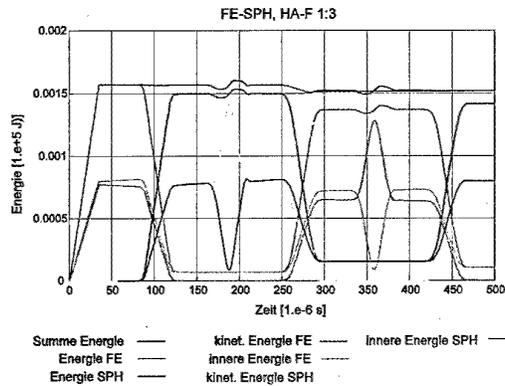
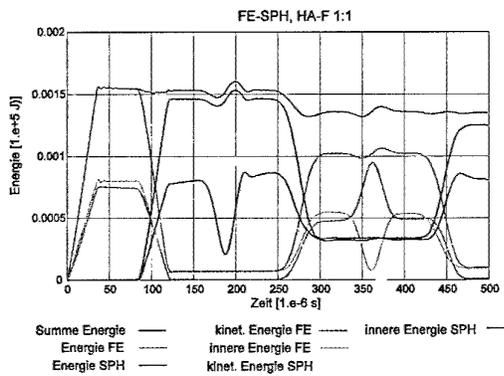


Abbildung 12.11: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-SPH-Kopplung mit der HA-F-Variante des neuen Kopplungsverfahrens. Links: grobe Auflösung links, rechts: feine Auflösung.

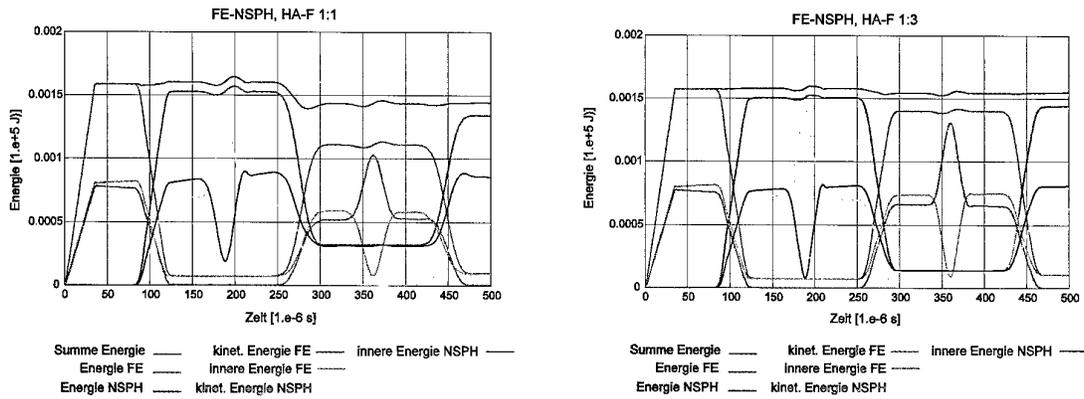


Abbildung 12.12: Entwicklung der Energieerhaltung in den Bereichen des Stabes bei FE-NSPH-Kopplung (Verwendung des normalisierten SPH-Verfahrens) mit der HA-F-Variante des neuen Kopplungsverfahrens. Links: grobe Auflösung, rechts: feine Auflösung.

### **12.3 Anhang 3: Quelltext der Deklaration der Klasse *BasisEl* im erstellten Programm**

```

// =====
//
//      basisel.h
//
// Virtual Base Class for BasisElements: BasisEl
//
// Particles, quadrilateral and hexahedral Elements are derived
// from this class.
//
// =====

class BasisEl : public virtual GlobalIOInterface
{
protected:

//neighbours are a nested class
class neighbour
{
public:
//for identification of the BasisEl that is the neighbour
BasisEl* nbptr;

//index for identification if multiple neighbours belong to one BasisEl (eg. in FE)
unsigned int i,j,k;

//the distance components and the absolute distance
double dist_field[4];
double vol;

//value of the approximation function
double phi;

//value of approximation function derivatives
myMathVector dphi_vec;

//force for FE/SPH-coupling
myMathVector force;

//average approximation radius
double hIJ;

//is used in shear terms during viscosity calculation, therefore saved
double hJ;

//the bond viscosity
//(used if the energy rate is calculated by particle summation)
double bondvisc;

//Constructor
neighbour():vol(0.),dphi_vec(3),force(3),hIJ(0.),hJ(0.),bondvisc(0.) {};

//copy-constructor
neighbour(const neighbour & nb): nbptr(nbptr=nb.nbptr),
i(nb.i),j(nb.j),k(nb.k),vol(nb.vol),phi(nb.phi),dphi_vec(nb.dphi_vec),
force(nb.force),hIJ(nb.hIJ),hJ(nb.hJ),bondvisc(nb.bondvisc){
dist_field[0]=nb.dist_field[0];
dist_field[1]=nb.dist_field[1];
dist_field[2]=nb.dist_field[2];
dist_field[3]=nb.dist_field[3];
};

//Destructor
~neighbour(){};

//enables sorting by distance if neighbours are stored in a list
friend bool operator < (const neighbour & nb1, const neighbour & nb2) {
return (nb1.dist_field[3]<nb2.dist_field[3]);
}

//two functions checking distance values during neighbour search
int check_dist_compon(){
double maxdist=2.0*hIJ;
int ok(0);

```

```

        if (dist_field[0]<maxdist && dist_field[1]<maxdist && dist_field[2]<maxdist)
            ok=1;
        return (ok);
    }

    int check_abs_dist(){
        double maxdist=2.0*hIJ;
        int ok(0);
        if (dist_field[3]<maxdist) ok=1;
        return (ok);
    }
}; //end of declaration of class neighbour

public:

//Global Number of the BasisEl
unsigned int      glob_BasisEl_nr;

//Number of associated Mass- and StressPoints
int              nr_MassPoints;
int              nr_StressPoints;

//pointer on pointer on MassPoints - When a BasisEl
//is created, an array of pointers to MassPoints is
//created when the Constructor is called.
//The pointers have to be set to point on the MassPoints by use of
//the set_MassPoint_ptr_arr -function (see below).
MassPoint        **MassPoint_ptr_arr;

//pointer on pointer on StressPoints - When a BasisEl
//is created, an array of pointers to StressPoints is
//created.
//The pointers have to be set to point on the StressPoints by use of
//the set_StressPoint_ptr_arr -function (see below).
StressPoint      **StressPoint_ptr_arr;

//Key of the Region in the global Region_map the BasisEl belongs to
Region::Key_type  Region_Key;
Region            *Region_ptr;

//Pointer to the next BasisEl, used to build up the
//linked lists for searching in the searchgrid with Cells
BasisEl           *next_BasisEl_ptr;

//Default constructor
BasisEl():glob_BasisEl_nr(0){};

//Constructor with Key specification
BasisEl(Region::Key_type Key): Region_Key(Key){};

//destructor, sets the status-variable 'used' of the associated
//StressPoints to zero, so they can be removed from the global list.
//Reduces the 'used' variable of associated MassPoints by one.
virtual ~BasisEl() {
    int i;
    for (i=0;i<nr_StressPoints;i++) {
        StressPoint_ptr_arr[i]->used=0;
        StressPoint_ptr_arr[i]->BasisEl_ptr=NULL;
    }

    for (i=0;i<nr_MassPoints;i++)
        MassPoint_ptr_arr[i]->disconnect_BasisEl(this);

    delete [] StressPoint_ptr_arr;
    delete [] MassPoint_ptr_arr;
};

//Sets the BasisEl's array of StressPoint-Pointers to the specified addresses
//Both arrays have to be of the same size, the nr_StressPoints.
virtual void set_StressPoint_ptr_arr(StressPoint ** ptr_arr){
    int i;
    StressPoint_ptr_arr = new (StressPoint*) [nr_StressPoints];

```

```

    for (i=0;i<nr_StressPoints; i++) {
        StressPoint_ptr_arr[i]=ptr_arr[i];
        StressPoint_ptr_arr[i]->BasisEl_ptr=this;
    }
}

//Sets the BasisEl's array of MassPoint-Pointers to the specified addresses.
//Both arrays have to be of the same size, the nr_MassPoints.
virtual void set_MassPoint_ptr_arr(MassPoint ** ptr_arr){
    MassPoint_ptr_arr= new (MassPoint*) [nr_MassPoints];
    int i;
    for (i=0;i<nr_MassPoints;i++)
        MassPoint_ptr_arr[i]=ptr_arr[i];
}

//Adds the BasisEl's StressPoint-Pointers to the referenced list
virtual void get_stresspt_ptrs(myList<StressPoint*>& list_of_ptrs){
    int i;
    for (i=0;i<nr_StressPoints;i++)
        list_of_ptrs.add(StressPoint_ptr_arr[i]);
};

//Adds the BasisEl's MassPoint-Pointers to the referenced list
virtual void get_mmasspt_ptrs(myList<MassPoint*>& list_of_ptrs) {
    int i;
    for (i=0;i<nr_MassPoints;i++)
        list_of_ptrs.add(MassPoint_ptr_arr[i]);
};

//Check the Parameters of the referenced searchgrid (min and max
//coordinates, grid spacing) for consistency with the BasisEl.
virtual void check_grid_param(SearchGrid & grid)=0;

//Let the grid sort the BasisEl in the right cell.
virtual void place_in_grid(SearchGrid & grid) =0;

//Function setting the maximum speed (node speed) and the
//maximum wave speed in the BasisEl (Hugoniot speed).
//Adding both gives the maximum absol. speed
virtual void max_speed(double & node_speed, double & wave_speed )=0;

//Function returning a minimum characteristic length of the BasisEl,
//useful for for timestep calculation
virtual double min_length() const = 0;

//The maximum length is important for the dimensions of the cells of the
//grid used for neighbour search.
virtual double max_length() const =0;

//Function returning directly the quotient of a characteristic length through
//the maximum speed in the BasisEl (Hugoniot speed + node speed)
virtual double local_deltat()=0;

//Adds the BasisEl to the list of neighbours and calculates distance
virtual void add_neighbour(list<neighbour> &, BasisEl * const be_ptr, const myPoint& xI,
    const double h)=0;

//Calculates the current artificial viscosity
virtual void calcartvisc()=0;

//Calculation of acceleration for one BasisEl's MassPoints,
//the SearchGrid is used to find the neighbours for particles.
virtual void calc_accel(SearchGrid&, double deltat)=0;

//Calculation of energy- and density- rates and velocity derivatives
virtual void calc_rates(SearchGrid&)=0;

//Second step of energy rate calculation
virtual double get_new_energ_rate()=0;

```

---

```
//Used for coupling Elements and Particles
virtual void add_coupling_force(const myMathVector & couple_force,int i, int j, int k)=0;

//Adjusts approximation variables, e.g. 'h-radius' for to density changes for sph
virtual void adjust_approx_var(double deltat)=0;

//Adding internal energy to the referenced ConservSum-object
virtual void add_eint(ConservSum&)=0;
};
```

#### **12.4 Anhang 4: Quelltext der Deklaration der globalen, im Programm verwendeten Containerklassen**

```

//=====
//                                global declarations
//=====

//===== typedefs for the STL containers used =====

//A global multimap is used for storing the BasisEl's (actually pointers to them).
//A multimap is a tree structure with Elements ordered
//by their Key (here, pairs of Keys and BasisEl-pointers
//are stored). One Key can occur many times (therefore m u l t i map).
//The type of the ordering Key is defined in Region. Currently Keys
//are of type int.
typedef multimap < Region::Key_type, BasisEl *, less < Region::Key_type > >
                    BasisEl_map_type;

//MassPoints are administrated in a multimap as well, using pointers to them
typedef multimap < Region::Key_type, MassPoint*, less < Region::Key_type > >
                    MassPoint_map_type;

//===== global Containers & iterators =====

//Pointers to Regions are stored in a map
//(ordered according to the !unique! Key).
typedef map<Region::Key_type, Region*, less<Region::Key_type> >
                    Region_map_type;
Region_map_type
Region_map_type::iterator
Region_map_it;

//As a shortcut to the Region the global iterator 'Region_map_it'
//is actually pointing on, a reference function 'Act_Region' is created:
Region& Act_Region() {
    return ((*Region_map_it).second);
};

//This function returns a pointer to the Region the global
//'Region_map_it' is pointing on
Region* Act_Region_ptr() {
    return ((*Region_map_it).second);
};

//Here is the global multimap for BasisEl's defined:
BasisEl_map_type
BasisEl_map_type::iterator
BasisEl_map;
BasisEl_map_it;

//As a shortcut to the BasisEl the global iterator 'BasisEl_map_it'
//is actually pointing on, a reference function 'Act_BasisEl' is created:
BasisEl& Act_BasisEl() {
    return ((*BasisEl_map_it).second);
};

//This function returns a pointer to the BasisEl the global
//iterator 'BasisEl_map_it' is pointing on
BasisEl* Act_BasisEl_ptr() {
    return ((*BasisEl_map_it).second);
};

//Here is the global multimap for MassPoints defined:
MassPoint_map_type
MassPoint_map_type::iterator
MassPoint_map;
MassPoint_map_it;

//As a shortcut to the MassPoints the global iterator 'Masspoint_map_it'
//is actually pointing on, a reference function 'Act_MassPoint' is created:
MassPoint& Act_MassPoint() {
    return ((*MassPoint_map_it).second);
};

//This function returns a pointer to the MassPoint the global
//'MassPoint_map_it' is pointing on
MassPoint* Act_MassPoint_ptr() {
    return ((*MassPoint_map_it).second);
};

```

```
//StressPoints are stored in an ordinary (doubly linked) list.
//That way deleting and adding are most easy. BasisEl have arrays of pointers
//for accessing their associated Mass- and StressPoints.
list<StressPoint>          StressPoint_list;
list<StressPoint>::iterator StressPoint_list_it;

//Pointers on MaterialConstant-Sets are stored in a map.
//Strings composed from Material-ID and Material Law -ID
//(EOS-ID or Strength-ID) are used as Key. As a map does not allow
//multiple objects with the same key, only one MatConst-Object can
//exist for one Material/Material-law combination.
//MatConst-Objects are accessed via pointers
//from EOS- and Strength- Objects.

//Before the MatConst-maps are defined, a Function (class) comparable to
//less<String> is defined which is used for sorting in the map.
class less_string : public binary_function<String, String, bool>
{
public:
    bool operator () (const String s1, const String s2) const {
        return ((s1)<(s2));
    }
};

//Type of the MatConst-map's:
typedef map<String, MatConst*, less_string > MatConst_map_type;

//MatConst-map for EOS Data
MatConst_map_type          MatConstEOS_map;
MatConst_map_type::iterator MatConstEOS_map_it;

//MatConst-map for Strength Data
MatConst_map_type          MatConstStrength_map;
MatConst_map_type::iterator MatConstStrength_map_it;
```

## **12.5 Anhang 5: Quelltext der Zeitintegrationsschleife des erstellten Programmes**

```

for (Step_nr=STARTCYC;(Step_nr<MAXCYC && Time<MAXTIME && gridok==1);Step_nr++) {
    //Reset the sums for global energy and momentum conservation
    globsum.reset();

    //Calculating soundspeed for all stresspoints->EOS - Objects
    for (StressPoint_list_it=StressPoint_list.begin();
        StressPoint_list_it!=StressPoint_list.end();
        StressPoint_list_it++) {
        (*StressPoint_list_it).EOS_ptr->calc_sound();
    }

    //Call calc_accel for all Regions, the regions then call calc_accel for the BasisEl's
    for (Region_map_it=Region_map.begin(); Region_map_it!=Region_map.end(); Region_map_it++)
    {
        Act_Region_ptr()->calc_accel((*Region_map_it).first, grid, deltat);
    }

    //Add boundary forces from stresses which come from interaction with particles
    for (Region_map_it=Region_map.begin(); Region_map_it!=Region_map.end(); Region_map_it++)
    {
        Act_Region_ptr()->set_bound((*Region_map_it).first, globsum, deltat);
    }

    //Calculate contact constraints (Master-Slave-contact) for Regions
    for (Region_map_it=Region_map.begin(); Region_map_it!=Region_map.end(); Region_map_it++)
    {
        Act_Region_ptr()->calc_contact((*Region_map_it).first, grid, deltat);
    }

    //Update accelerations (with boundary conditions) for Region
    for (Region_map_it=Region_map.begin(); Region_map_it!=Region_map.end(); Region_map_it++)
    {
        Act_Region_ptr()->update_accel((*Region_map_it).first);
    }

    //Integrate velocity and coordinates for all MassPoints, velocity boundary conditions
    //are taken care of in the 'integ_kinematik' method itself
    for (MassPoint_map_it=MassPoint_map.begin(); MassPoint_map_it!=MassPoint_map.end();
        MassPoint_map_it++) {
        Act_MassPoint().integ_kinematik(deltat, deltath, INTEG_SCHEME, globsum);
    }

    //Calls calc_rates (calculating energy and deformation rate) for the BasisEls
    //belonging to the regions.
    for (Region_map_it=Region_map.begin(); Region_map_it!=Region_map.end(); Region_map_it++)
    {
        Act_Region_ptr()->calc_rates((*Region_map_it).first, grid);
    }

    //Stress calculation for all stresspoints
    for (StressPoint_list_it=StressPoint_list.begin();
        StressPoint_list_it!=StressPoint_list.end();
        StressPoint_list_it++) {
        (*StressPoint_list_it).calc_stress(deltat);
    }

    //Complete energy integration with new pressure and density values
    for (StressPoint_list_it=StressPoint_list.begin();
        StressPoint_list_it!=StressPoint_list.end();
        StressPoint_list_it++) {
        (*StressPoint_list_it).complete_energy(deltat);
    }

    //Adjust Approximation Parameters (h-radius, Element Volume)
    for (BasisEl_map_it=BasisEl_map.begin(); BasisEl_map_it!=BasisEl_map.end();
        BasisEl_map_it++) {
        Act_BasisEl_ptr()->adjust_approx_var(deltat);
    }

    //Converts distorted elements into particles.
    for (Region_map_it=Region_map.begin(); Region_map_it!=Region_map.end(); Region_map_it++)
    {
        Act_Region_ptr()->adapt((*Region_map_it).first, grid);
    }

    //Delete StressPoints which are no longer used by BasisEl's from the global (STL) List
    StressPoint_list_it=StressPoint_list.begin();
    while (StressPoint_list_it!=StressPoint_list.end()) {
        if ((*StressPoint_list_it).used==0) {
            list<StressPoint>::iterator StressPoint_list_it_eraser;
            StressPoint_list_it_eraser=StressPoint_list_it;
        }
    }
}

```

```

        StressPoint_list_it++;
        StressPoint_list_erase(StressPoint_list_it_eraser);
    }
    else
        StressPoint_list_it++;

//Delete MassPoints which are no longer used and remove the pointers
//on those MassPoints from the global map.
MassPoint_map_it=MassPoint_map.begin();
while (MassPoint_map_it!=MassPoint_map.end()) {
    if (Act_MassPoint().ret_used()==0) {
        MassPoint_map_type::iterator    MassPoint_map_it_eraser;

        MassPoint_map_it_eraser=MassPoint_map_it;
        MassPoint_map_it++;

        //Delete the MassPoint itself
        delete ((*MassPoint_map_it_eraser).second);

        //Remove the Pointer on the address of the former MassPoint from the global map.
        MassPoint_map.erase(MassPoint_map_it_eraser);
    }
    else
        MassPoint_map_it++;
}

//Adjust Boundaries for Regions.
for (Region_map_it=Region_map.begin(); Region_map_it!=Region_map.end();
     Region_map_it++){
    Act_Region_ptr()->make_boundaries((*Region_map_it).first,grid);
}

//Reset the grid used for neighbour search.
grid.reset();

//Setup the searchgrid's parameters (min, max Coord.,min. Cell length)
//by scanning through all BasisEl's
for (BasisEl_map_it=BasisEl_map.begin(); BasisEl_map_it!=BasisEl_map.end();
     BasisEl_map_it++) {
    Act_BasisEl_ptr()->check_grid_param(grid);
}

//Build the linked lists for cells
for (BasisEl_map_it=BasisEl_map.begin(); BasisEl_map_it!=BasisEl_map.end();
     BasisEl_map_it++) {
    Act_BasisEl_ptr()->place_in_grid(grid);
}

//Advance Time
Time+=deltat;
Timeth+=deltath;

//Calculate global conservation sums
for (MassPoint_map_it=MassPoint_map.begin(); MassPoint_map_it!=MassPoint_map.end();
     MassPoint_map_it++) {
    Act_MassPoint().add_kinetic(globsum);
}
for (BasisEl_map_it=BasisEl_map.begin(); BasisEl_map_it!=BasisEl_map.end();
     BasisEl_map_it++) {
    Act_BasisEl_ptr()->add_eint(globsum);
}

globsum.calc_total_energ();

//Calculate new timestep, this function scans through all BasisEl's
calcdeltat(deltat,deltath);
} //End of time integration loop

```

## Verzeichnis der in dieser Schriftenreihe erschienenen Hefte

- 96/1 **Gebbeken, N.:** *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Faserverbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*
- 97/1 **Rötzer, J.:** *Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbetontragwerken unter hohen Dehnungsgeschwindigkeiten und hohen Drücken*
- 97/2 **Gebbeken, N.; Wanzek, T.; Petersen, C.:** *"Semi-rigid" Verbindungen - Versuche an "T-stubs". Versuchsbericht*
- 97/3 **Jiang, Y.:** *Tragverhalten dünner rechteckiger Stahlplatten mit großen Verformungen unter Berücksichtigung der Membranwirkung*
- 97/4 **Reif, F.:** *Mittels geregelter harmonischer Endpunktverschiebung induzierte räumliche Seilschwingungen.*
- 97/5 **Wei, Y.:** *Influences of Creep, Shrinkage and Steel Relaxation on Structural Behaviour.*
- 97/6 **Wurzer, O.:** *Zur Tragfähigkeit von Betondübeln.*
- 97/7 **Wanzek, T.:** *Zu Theorie, Numerik und Versuchen verformbarer Anschlußkonstruktionen.*
- 97/8 **Gebbeken, N.; Rothert, H.; Wanzek, T.:** *Zur Theorie und Finite-Element-Berechnung des Tragverhaltens von verformbaren (semi-rigid) Anschlußkonstruktionen im Stahlbau.*
- 99/1 **Böge, G.:** *MAKROS - Pre- und Postprozessing für Finite Elemente - AutoCAD-Erweiterung zur Generierung von FE-Modellen.*
- 00/1 **Gebbeken, N.:** *Beiträge zur Begabungs-, Bildungs- und Hochschulpolitik.*
- 00/2 **Bettin, I.; Urrutia Galicia, J.C.; Gebbeken, N.:** *On the analysis of vertical circular cylindrical tanks under earthquake excitation at its base.*
- 00/3 **Gebbeken, N.:** *Wörterbuch Bauwesen Englisch-Deutsch Deutsch-Englisch.*
- 00/4 **Ruppert, M.:** *Zur numerischen Simulation von hochdynamisch beanspruchten Betonstrukturen.*
- 00/5 **Sauer, M.:** *Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgängen.*